ALGUNAS DISQUISICIONES FILOSÓFICAS EN TORNO AL PROBLEMA DE LA EXISTENCIA DEL INFINITO EN MATEMÁTICAS

Luis Cornelio Recalde
Andrés Chaves Beltrán
Universidad del Valle / Universidad de Nariño
Colombia

Resumen

En este artículo se presentan algunos aspectos sobre el problema de existencia en matemáticas, tomando como referencia el infinito actual. En primer lugar se describe las concepciones de los antiguos sobre el infinito y los argumentos aristotélicos para negar la existencia del infinito actual. En seguida se describe la incorporación del infinito actual a las matemáticas establecido por Georg Cantor entre 1880 y 1896. A continuación se aborda el problema de la existencia en matemáticas planteado por los matemáticos franceses Borel, Baire y Lebesgue. A partir del problema de la existencia efectiva en cada uno de los niveles de Baire, se describen las cuatro categorías existenciales, planteadas por el matemático ruso Nicolás Lusin; luego se analiza la posición de Lusin en términos de la teoría de la "tematización", introducida por Jean Cavaillès y Jean-Louis Gardies. Al final se argumenta la necesidad de establecer una filosofía de las matemáticas desde el interior mismo de las matemáticas.

Palabras clave: *clases de Baire; ontología de las matemáticas; epistemología; existencia en matemáticas.*

Recibido: 16 de noviembre de 2016. **Aprobado:** 30 de junio de 2017.

Praxis Filosófica Nueva serie, No. 45 Suplemento, julio-diciembre 2017: 219 - 241
DOI: 10.25100/pfilosófica.v0i45S.6147

ISSN (I): 0120-4688 / ISSN (D): 2389-9387

Some Philosophical Disquisions Around the Problem of the Existence of Infinite in Mathematics

Abstract

In this article we present some aspects about the problem of existence in mathematics, taking as reference of the actual infinity. First we describe the conceptions of the ancients about the infinity and the aristotelian arguments to deny the existence of the actual infinity. Next, we describe the incorporation of the actual infinity, established by Georg Cantor between 1880 and 1896. We then discuss the problem of existence in mathematics posed by the French mathematicians Borel, Baire and Lebesgue. From the problem of effective existence at each of the levels of Baire, we describe the four existential categories, posed by the Russian mathematician Nicolás Lusin; Then Lusin's position is analyzed in terms of the thematization theory introduced by Jean Cavaillès and Jean-Louis Gardies. Finally we argue in the need to establish a philosophy of mathematics from the inside of mathematics.

Keywords: *Baire´s classes; ontology of mathematics; epistemology; existence in mathematics.*

Luis Cornelio Recalde: Profesor titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle. Magíster en matemáticas y Doctor en Educación Matemática por la Universidad del Valle. Director del Grupo *Historia de las Matemáticas* de la Universidad del Valle.

Dirección electrónica: luis.recalde@correounivalle.edu.co

Andrés Chaves Beltrán: Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Doctor en Historia de la Ciencia por la Universidad Autónoma de Barcelona. Miembro del Grupo *Gescas* de la Universidad de Nariño.

Dirección electrónica: ancbel@yahoo.es

ALGUNAS DISQUISICIONES FILOSÓFICAS EN TORNO AL PROBLEMA DE LA EXISTENCIA DEL INFINITO EN MATEMÁTICAS

Luis Cornelio Recalde
Andrés Chaves Beltrán
Universidad del Valle / Universidad de Nariño
Colombia

Introducción

Se aborda en este documento una de las cuestiones más controversiales en la relación ciencia y filosofía, como lo es la indagación sobre la naturaleza de las matemáticas. Diariamente, los matemáticos debemos convivir con números, funciones, líneas, puntos, triángulos, vectores, etc. Nociones en las que no reconocemos lo sensible. Por lo menos sabemos que no tienen color, olor, sabor, dureza ni ninguna otra propiedad de los objetos físicos. Son entidades invisibles a las cuales solo tenemos acceso a través del intelecto. Alguien podría refutarnos, diciendo se puede escribir el número **2** de manera concreta en un tablero; sin embargo, los matemáticos tenemos mucho cuidado en establecer diferencias profundas entre el número y su representación. Desde la teoría de conjuntos, el símbolo **2** no es más que una representación de la clase de equivalencia de todos los conjuntos de la forma $\{a, b\}$, donde $a \neq b$. Este es un ejemplo sencillo por tratarse de un conjunto finito, el problema se torna complejo cuando se requiere determinar el tipo de existencia del infinito, en especial del infinito actual. En esta dirección, matemáticos y filósofos no han podido ponerse de acuerdo.

En nuestro trabajo cotidiano, los matemáticos nos referimos a las nociones de una forma muy similar a como lo hacen los físicos, los químicos o los biólogos con sus objetos. Al nivel del lenguaje, los puntos, las rectas o los planos parecen poseer el mismo nivel ontológico que los electrones, un ecosistema o los quars. Al igual que en la ciencias empíricas, en matemáticas es muy común usar expresiones que enmarcan objetos: “Existe un número primo que es par”.

¿Merecen las nociones matemáticas el apelativo de objetos? ¿Gozan de algún tipo de existencia? ¿Cuál es esa existencia?

Los anteriores interrogantes se pueden abordar desde diferentes instancias y perspectivas. Para el caso de este artículo se toma como referencia el problema histórico de la incorporación del infinito actual a las matemáticas establecido por Georg Cantor entre 1880 y 1896. Muchos matemáticos y filósofos de las matemáticas sustentaban que los desarrollos de Cantor correspondían a elucubraciones metafísicas, a pesar de que Cantor argumentaba que la incorporación de los conjuntos actualmente infinitos eran necesarios para la comprensión de los números reales.

Afortunadamente, las ideas de Cantor fueron incorporadas por los matemáticos franceses René Baire, Émile Borel y Henri Lebesgue en sus investigaciones sobre teoría de funciones. En particular, Borel utiliza la teoría de conjuntos cantoriana en la clasificación de conjuntos de los números reales. Baire define una clasificación de funciones discontinuas a través de una jerarquía bien ordenada de números transfinitos. Lebesgue establece un puente de contacto entre los desarrollos de Borel y Baire; sin embargo, en su demostración sobre la existencia de funciones en cada una de las clases de Baire, Lebesgue comete un error conceptual, detectado por los rusos Souslin y Lusin.[1] La enmienda de este error, obliga a que Lusin defina los conjuntos analíticos; una gama de conjuntos que desborda el nivel del infinito adoptado por Borel, Baire y Lebesgue. Para la sustentación de sus desarrollos Lusin no solo debe desplegar novedosas técnicas conjuntistas, sino también determinar las bases filosóficas de lo que se denomina existencia en matemáticas.

El objetivo fundamental de este artículo es aprovechar el análisis histórico epistemológico que se ha desarrollado alrededor del problema de la existencia en matemáticas, para argumentar a favor de una filosofía de las matemáticas desarrollada desde el interior mismo de las matemáticas. En este sentido se toman como herramientas conceptuales las nociones

[1] Lebesgue considera el resultado incorrecto de que la proyección continua de un conjunto boreliano es otro conjunto boreliano. Un conjunto boreliano en $\mathbb{R}^n$ es aquel que se forma, a partir de los conjuntos abiertos, a través de uniones finitas o numerables y complementos.

matemáticas de inducción transfinita, recursión transfinita, los conceptos de clase y relación de equivalencia. Uno de los problemas que atañe a la ontología y la epistemología, como es el problema de la objetivación o "cosificación", que consiste en explicar cómo una noción matemática se transforma en un "objeto" matematico, se aborda a través de una herramienta conceptual, que el filósofo y matemático francés Jean Cavaillès denomina *campo temático*. En el artículo se muestra que mediante la *tematización* se logra establecer la "objetivación de una operación", esquivando los problemas del intuicionismo y del logicismo.

Aristóteles y la proscripción del infinito actual en la antigüedad griega

Durante muchos siglos, los matemáticos siguieron la tradición filosófica, proveniente de la antigua Grecia, que le negaba legitimidad al *infinito actual* y sólo aceptaba el *infinito potencial*. Tal vez el vocablo que más nos aproxima al infinito griego es *apeiron*: απειρον, traducido literalmente lo ilimitado, pero con múltiples acepciones. El *apeiron* también abarcaba lo caótico, lo que no lograba su ser, lo imperfecto, lo incognoscible; el principio y fin de todas las cosas, el nacimiento y la destrucción, pero también abarcaba lo divino e incorruptible.

Anaximandro, Anaxágoras, Pitágoras, Platón y Demócrito se habían atrevido, cada uno desde sus concepciones filosóficas, metafísicas y matemáticas, definir el *apeiron*. Para todos ellos, el infinito es un principio; porque las cosas o son principios o provienen de un principio. Pero el infinito no podría provenir de un principio pues tendría un límite, lo que estaría en contra de su propia naturaleza. En cambio como principio sería ingenerable e indestructible.

Para Anaximandro el *apeiron* constituye la causa entera del nacimiento y la destrucción. Del *apeiron* surgen los infinitos mundos en un proceso cíclico de generación y destrucción. Anaxágoras concibió el *apeiron* como la "caótica amalgama original" que contenía todas las cosas, ilimitadas en cuanto a su cantidad y pequeñez. Estos "infinitesimales"[2] los denominó *homeomerías*. El origen del universo se dio con la puesta en movimiento de las *homeomerías,* debido la acción del poder ordenador del intelecto. La experiencia sensible se constituye así, como producto de la experiencia intelectual.

Anaxágoras retoma la anterior concepción, estableciendo un planteamiento muy cercano a los modernos fractales, en el sentido que cada parte era una mezcla semejante al todo. Si para Anaxágoras las *homemeorías*

[2] No se podría hablar del concepto moderno de infinitesimal, el cual tiene actualmente una definición muy precisa.

eran infinitamente divisibles, para Demócrito, eran partículas indivisibles, ellas constituían el principio fundamental de las cosas, en una concepción que se ha denominado *atomista*.

De acuerdo con Aristóteles, los pitagóricos y Platón consideraban el infinito como uno de los principios de los seres; un principio en sí o esencial. Sin embargo se diferencian en que para los pitagóricos el infinito hace parte de los seres sensibles, pues ellos no establecían una separación entre el mundo sensible y el mundo matemático, sustentando la idea de que aquello que cae por fuera del cielo es infinito. En cambio Platón sostiene que no hay nada fuera del cielo, ni siquiera las ideas, dado que las ideas no necesitan lugar. De esta forma, para Platón, el infinito se encuentra en los seres sensorialmente perceptibles y en las ideas (Aristóteles, 1977, págs. 603-604).

Para Aristóteles el problema del infinito, ante todo, era un problema del físico que se enfrentaba a la naturaleza. La discusión ontológica del infinito no concernía al matemático, pues era claro que en las matemáticas se trabajaba con magnitudes arbitrariamente grandes y pequeñas,[3] pero para el estudioso de la naturaleza, que trabajaba con el movimiento y el tiempo, esto no estaba tan claramente establecido. Era indispensable averiguar si estas magnitudes eran finitas o infinitas, y correspondía, entonces, al físico estudiar acerca de la existencia del infinito y en caso de que así fuese, cuál era ese tipo de "ser".

Antes de abordar el problema ontológico, Aristóteles comienza explicitando algunos de los puntos que han hecho creer en la existencia del infinito. En primer lugar el tiempo, sin principio ni fin y las magnitudes: infinitamente divisibles. También está el hecho de que cada cosa, por estar limitada, no deja la posibilidad de un límite último. Finalmente aparecería el pensamiento ilimitado, y con él, la serie inagotable de los números.

Aristóteles concluye que el infinito no es algo acabado, sino aquello por fuera de lo cual siempre hay algo: una especie de despensa inagotable de la que se pueda extraer sin cesar nuevas cosas. Para Aristóteles, el infinito tiene una existencia potencial. Este concepto no encerraba ningún sentido de perfección, sino por el contrario, estaba asociado a lo ambiguo, a lo que nunca logra su ser, a la imperfecta materia sin forma. "…infinito es aquello en que, tomada una determinada cantidad, siempre es posible tomar algo más fuera de ella," dice Aristóteles en la *Física*,[4] al mismo tiempo que plantea dos tipos de infinito: por adición y por divisibilidad. El primero se presenta en

[3] "… resulta evidente que el estudio y consideración del infinito corresponde a los físicos." (Aristóteles, 1977, pp. 605).

[4] (Aristóteles, 1977, pág. 610)

el proceso de contar, pues aunque no existe un conjunto infinito de números como un todo, siempre se puede obtener un número más grande que otro agregándole una unidad. El segundo tipo de infinito aparece en el proceso de división de magnitudes. Por ejemplo se puede dividir un segmento en segmentos más pequeños, que a su vez se pueden dividir en otros aún más pequeños y así sucesivamente.

Es interesante anotar, que si bien la existencia del infinito le planteaba a Aristóteles múltiples problemas, su negación producía incongruencias teóricas aún peores. Sin este concepto, el tiempo tendría comienzo y fin; el movimiento no sería eterno, justamente uno de los supuestos básicos de su física. De otro lado, si las magnitudes no fuesen indefinidamente divisibles, no existiría el continuo y por ende, tampoco el movimiento, el espacio y el tiempo.

Las ideas aristotélicas, sobre el infinito, fueron adoptadas por Euclides en los *Elementos*, obra que marcó el derrotero del quehacer matemático durante más de 26 siglos. La negación del infinito actual se establece de manera legislativa en los axiomas y las definiciones. Así en la noción común 8 de los *Elementos*, Euclides establece que: "Y el todo es mayor que la parte".[5]

Por más de veinte siglos los matemáticos sólo reconocieron el infinito aristotélico, negándole legitimidad al infinito como algo ya acabado. Este "horror" al infinito actual dio lugar a unas matemáticas regidas por el infinito potencial. De esta forma, Arquímedes, Cavalieri, Newton, Leibniz, y demás matemáticos hasta Cantor, esquivaban o escondían el uso de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, como los infinitésimos, y sólo las usaban como herramientas operativas.

Cantor y la aceptación del infinito actual en las matemáticas

Georg Cantor, a finales del XIX, estableció una teoría del infinito actual. Cantor empieza apoyándose en los trabajos de Bernard Bolzano, especialmente en un libro *Las Paradojas del Infinito*,[6] el cual constituye la primera crítica directa a las diversas conceptualizaciones del infinito. En este libro, Bolzano presenta un cambio de actitud frente a la tradición aristotélica del infinito; no destierra el infinito actual, sino que lo retoma a pesar de su carácter paradójico. Cantor va más allá que Bolzano, demostrando que existen diversos grados de infinitos. Con esto, Cantor se alejaba de la creencia, la cual había perdurado durante más de veinte siglos, que establecía la existencia de un sólo infinito inalcanzable y no real. Cantor empieza

[5] (Euclides, 1991, pág. 201)

[6] (Bolzano, 1991)

desconociendo la noción común 8, al incorporar el concepto de *potencia*, que es la generalización del número de elementos de un conjunto, o número cardinal. De esta forma, dos conjuntos tendrán la misma potencia –son equipotentes- cuando se pueda establecer una relación biunívoca entre sus elementos; o dicho de otra manera, cuando se pueda definir una función biyectiva entre los dos conjuntos. De esta forma se puede demostrar que los números naturales son equipotentes con los pares, dado que se puede definir la función biyectiva f, de los números naturales en los pares, $f(n) = 2n$.

Cantor incorpora los números infinitos o números transfinitos en su obra *Fundamentos de una teoría general de conjuntos* de 1882. Esta obra es un ejemplo de simbiosis entre lo epistemológico y lo filosófico. El primer apartado se enfoca en sustentar el sustrato ontológico del infinito actual, en contraposición de los planteamientos aristotélicos. De esta forma, empieza planteando las diferencias entre infinito actual y el infinito potencial. Cantor era consciente de que la incorporación del infinito actual en sus trabajos le permitía extender el concepto de número más allá de los niveles existentes. Ahora se trataba de formalizarlos: "definiré a continuación los números enteros reales infinitos, a los que me vi conducido durante los últimos años sin caer en la cuenta de que eran números concretos con un significado real".[7] Cantor incorpora los números ordinales transfinitos a partir de tres principios de generación: *Primer principio*: La adición sucesiva de unidades. *Segundo principio*: El límite de sucesiones crecientes. *Tercer principio*: Aumento de cardinalidad.

Por el *primer principio* se obtiene la secuencia:

$$1, 2, 3, ..., n, ...,$$

de nuestros números naturales, los cuales constituyen la *clase* I. A partir de la sucesión de ordinales de *clase* I, se construyen los ordinales transfinitos numerables o de *clase* II. El *segundo principio* define $\omega = \text{lím}\ n$, el cual corresponde al menor ordinal que es mayor de todos los naturales, el cual designó con el símbolo ω. A partir de ω podía obtener nuevos ordinales mediante la adición de unidades, y nuevamente aplicarle el límite, de tal suerte que se podía obtener una cadena infinita de ordinales:

$$1, 2, 3, ...\ \omega, \omega+1, \omega+2, ...\ \omega2\ , \omega2+1, \omega2+2, \omega2+3, ...;$$

luego viene $\omega3$, $\omega4$, $\omega5$, ... después de todos estos seguirá ω^2, donde se inicia nuevamente el proceso:

[7] (Cantor, 2006)

$\omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2, ..., \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \omega^2+\omega+2, ..., \omega^2+2\omega, \omega^2+2\omega+1, ..., \omega^2+3\omega, ..., \omega^2+4\omega, ..., \omega^2 2, ..., \omega^2 3, ... \omega^3, ..., \omega^4, ..., \omega^\omega,..., \omega^{(\omega^\omega)},..., \omega^{(\omega^{\omega^\omega})},...$

El hecho de que ω y ω + 1 son dos números ordinales distintos, pero con igual cardinalidad llevó a Cantor a establecer una diferencia importante entre los números finitos y los transfinitos. En los números finitos no hay diferencia entre su ordinal y su cardinal, mientras que en los transfinitos hay diferencias sustanciales. Esta distinción proviene, para Cantor, de la diferencia conceptual entre "Zahl" y "Anzahl". El término Zahl se refiere a un conjunto sin importar el orden. Azahl toma en cuenta el orden.

Cantor demuestra que el conjunto de todos los números ordinales de la *clase* II no es numerable. Así, el *tercer principio* de generación le permite incorporar conjuntos bien ordenados no numerables al establecer el menor ordinal que es mayor que cualquier ordinal de la *clase* II, el cual se designa como Ω, y que corresponde al primer ordinal transfinito de la clase III,

Partiendo de la diferencia entre "Zahl" y "Anzahl", Cantor define, en *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos* de 1896, los cardinales transfinitos:[8]

$\aleph_0$: es el cardinal de los conjuntos infinitos numerables.
$\aleph_1$: es el número cardinal que sigue en orden de magnitud de acuerdo con la cadena de construcción de los ordinales.

De esta forma establece una sucesión bien ordenada de potencias o números cardinales, denotados con la primera letra del alfabeto hebreo, "aleph":

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph\omega, ...$$

Para que los cardinales y ordinales tuvieran sentido aritmético, Cantor definió las operaciones suma y producto, demostrando que era posible extender la aritmética finita a una aritmética infinita. Cantor no tuvo mayores obstáculos en mostrar la idoneidad epistemológica de sus resultados. Sin embargo, desde el punto de vista ontológico, sus planteamientos dejaban muchas dudas, en particular el modo de existencia de estos nuevos objetos, los números transfinitos. La teoría de conjuntos actualmente infinitos parecía pertenecer más al ámbito de la filosofía que a las matemáticas. En las tablas de clasificación de las matemáticas empieza a aparecer en 1905, en el capítulo de *Generalidades*, que comprendía filosofía, historia y pedagogía.

El reconocimiento de la teoría de conjuntos como una rama de la matemáticas se dio luego de un proceso productivo y controversial, en el

[8] (Cantor G., 1995).

cual jugaron un papel destacado los matemáticos franceses: Borel, Baire y Lebesgue, quienes incorporaron en sus trabajos las técnicas de Cantor. Sin embargo, los tres no adoptaron totalmente la filosofía cantoriana sobre el infinito actual, dado que sus inclinaciones filosóficas eran por una especie de constructivismo, denominado semi-intuicionismo. Aunque en sus artículos matemáticos hacían planteamientos filosóficos, no corresponde a una filosofía acabada de las matemáticas, sino, más bien, una filosofía sincrética en la cual conviven los planteamientos infinitistas de Cantor con una visión finitista de las matemáticas.

El infinito actual en la jerarquía de funciones de Baire

Baire utiliza la secuencia de ordinales numerables para generar una sucesión de clases de funciones funciones $\{C_\lambda\}$, donde λ es un ordinal de la *clase* I o de la *clase* II. Cada función de la *clase* λ se define a partir de funciones de las clases anteriores.[9] Sin embargo, esta generación es meramente nominal en su generalidad. Baire establece la diferencia entre existencia nominal y existencia efectiva o constructiva.

El problema de la existencia efectiva de funciones de cada una de sus clases, fue algo que preocupó enormemente a Baire. Se trataba de probar que su clasificación no solo respondía a un listado de objetos constituidos en un proceso lógico, sino que, cada una de estas clases no era vacía. Para Baire, la existencia de los objetos matemáticos −en este caso de las funciones− no se da a través de definiciones prescriptivas; es necesario explicitar componentes que materialicen lo definido.

Esta desagregación es importante en los procesos demostrativos, específicamente en aquellos en donde se utilizan las secuencias de ordinales transfinitos, luego denominada inducción transfinita. Basándose en la inducción ordinaria, Baire incorpora el proceso de inducción transfinita.

Baire establece procesos constructivos para las primeras cuatro clases. Incluso, de cada una de éstas exhibe ejemplos concretos. En estos procesos constructivos, en particular en los teoremas de caracterización de las clases, es donde se presenta la llamada *existencia constructiva de Baire*. Este tipo de existencia implica construir ejemplos concretos de funciones que pertenezcan a cada una de las clases. En su tesis de doctorado de 1899, Baire lo hace para funciones de las clases 0, 1 y 2; en 1905 construye un ejemplo de clase 3.[10]

Baire no llegó a establecer procesos constructivos para las clases superiores, sin embargo, este problema fue retomado y resuelto por

[9] (Baire, 1899, págs. 116-118).

[10] Con base a la técnica empleada por Baire, Ludmila Keldych establece ejemplos de funciones de clase 4 y posteriormente de cualquier clase finita (Keldych, 1940).

Lebesgue y Lusin. Lebesgue establece un circuito entre las clases de Baire, los conjuntos borelianos (Conjuntos B-medibles, establecidos por Borel) y las clases de funciones representabes analiticamente o funciones medibles que introduce en 1905 en su artículo: *Sobre las funciones representables analíticamente*.[11]

Con base en los conjuntos medibles, Lebesgue establece una relación biunívoca entre las funciones representables analíticamente y las funciones medibles. Esto lo lleva a demostrar la existencia de funciones en cada una de las clases de Baire y a construir una función que escapa estas clases. En 1914, los matemátios rusos Souslin y Lusin detectan que Lebesgue ha cometido un error en su demostración al considerar que la imagen continua de conjuntos borealianos es un conjunto boreliano.[12]

Las categorías existenciales de Lusin

Entre 1914 y 1927 Lusin aborda el problema la existencia de las clases de Baire de una manera directa; en este periodo produce cinco artículos sobre esta temática.[13] Lusin sintetiza su investigaciones en *Les ensembles analytiques et leurs applications*, cuyo prefacio fue escrito por Lebesgue.[14] En esta obra Lusin no sólo establece resultados de gran factura técnica, sino que pone de manifiesto la postura filosófica que los soporta. De esta manera, para Lusin es perentorio establecer el tipo de existencia que se ponga en consideración; en este sentido identifica cuatro categorías de existencia de objetos matemáticos (Lusin N. , 1972, pág. 55).

1. La *existencia constructiva de Baire*: se presenta al describir objetos mediante procesos en los cuales se utilicen únicamente los ordinales de primera o segunda clase de la teoría cantoriana de conjuntos.
2. *La existencia constructiva de Lebesgue*: los objetos se describen a través de procesos que hacen uso de la totalidad de los ordinales de segunda clase.
3. *Existencia de Cantor*: se acepta objetos que se determinan a partir de una generalización del método mediante el cual Cantor comprobó que es no numerable.
4. *Existencia de Zermelo*: se adoptan objetos en los que interviene una función de elección. Esto implica que existen conjuntos en los cuales los elementos no se pueden exhibir de manera individual.

[11] (Lebesgue, 1905).

[12] Este aspecto ha sido analizado en (Chaves, 2006).

[13] (Lusin, 1914), (Lusin, 1917), (Lusin, 1921), (Lusin, 1927) y (Lusin, 1927A).

[14] Primera edición fue publicada en Paris en 1930. Aquí utilizamos la segunda edición publicada en 1972: (Lusin, 1972).

El problema general de existencia del infinito en matemáticas

Tal como se ha establecido en el apartado anterior, para Lusin no se puede hablar de una existencia absoluta, sino de una existencia relativa a alguna de las categorías señaladas. En este sentido es conveniente analizar la afirmación que hace Lusin, en la conclusión de su libro *Les ensembles analytiques et leurs applications*,[15] cuando se declara empirista. ¿A qué tipo de empirismo hace alusión Lusin? Para abordar este dilema es necesario entender el nivel de discusión de la época, que permite catalogar a los principales analistas franceses de finales del siglo XIX (Borel, Baire y Lebesgue) como semiintuicionistas. Esta discusión filosófica se enmarca en el problema respecto al tipo de objetos que se deben aceptar en matemáticas.

En *Méthodes et problèmes de la théorie de fonctions*, Borel llama la atención respecto al uso de definiciones nominales, puesto que los razonamientos realizados sobre el vacío, pueden llevar a inconsistencias;[16] en este sentido, introduce la noción de *buena definición*. Una *buena definición* debe trascender los niveles verbal y lógico, en los cuales se manipulan símbolos que dejan por fuera las intuiciones básicas de número entero y continuo geométrico. Las concepciones de Borel son cercanas a los planteamientos de Brower. La diferencia es que Brower establece un primado de lo aritmético sobre lo geométrico. Para Brower, la intuición fundamental es la aritmética.

Según Borel, la generación de objetos matemáticos tiene sentido si sigue el modelo de los números naturales, cuyo proceso de formación sucesiva corresponde a un acto de razonamiento propio de los humanos. Todo aquello que no esté sometido a esta consideración queda por fuera de las matemáticas; tal es el caso de los ordinales transfinitos de la clase II, por cuanto no hay un proceso de formación que dé cuenta de la totalidad de ellos. Borel sólo acoge aquellos transfinitos definidos bajo los cánones de un proceso constructivo tipo los enteros.

> Es bien conocido que todo sistema de convenciones enunciado en un número limitado de palabras, entre las cuales puede figurar la palabra *indefinidamente*, no conducirá más que a designar un conjunto numerable; no es entonces posible que se llegue a una notación bien definida para el conjunto de números que Cantor ha denominado *números de la segunda clase.* (Borel, 1898, pág. 161)

[15] (Lusin, 1972).

[16] (Borel, 1898, pág. 92).

Esto trae como consecuencia la imposibilidad de considerar el conjunto de los reales como un todo. Borel sólo acepta los números calculables. Un número x es calculable si para todo número natural n, existe un número racional r, tal que $|x - r <\frac{1}{n}|$. De esta manera, sólo se admiten aquellos números irracionales para los cuales se pueda especificar una sucesión de racionales que permita expresarlo con un error tan pequeño como se quiera. Este es el caso de los números π o e.

Desde la concepción de Borel se consideran conjuntos *bien definidos* aquellos obtenidos por uniones finitas o numerables y diferencias de intervalos. Los conjuntos *bien definidos* corresponden a los borelianos o conjuntos B-medibles, los cuales se clasifican según la jerarquía de Baire de La Vallée Poussin.

Las concepciones, sobre la existencia en matemáticas de Borel concuerdan con la *existencia constructiva de Baire*.

Este tipo de construcciones se pueden tornar abstrusas; como se mencionó antes, Baire sólo pudo establecer un proceso constructivo hasta la clase 3 en 1903. Después de quince años, Ludmila Keldych logra una construcción efectiva para funciones de clase 4. Posteriormente, Keldych, desarrolla en (Keldych, 1940) una técnica constructiva para cada función de la clase α, donde α es un número transfinito de la segunda clase *efectivamente dado*.[17]

Para demostrar propiedades de los conjuntos B-medibles, Borel recurre a una forma de recursión transfinita: se supone que la propiedad se cumple hasta un paso determinado y, con base a esto, se demuestra que la propiedad se cumple para el siguiente nuevo paso (Borel, 1898, pág. 235). Para Borel esta forma de establecer conjuntos y de demostrar propiedades constituye un proceso dialéctico de formación que no da lugar a una totalidad, sino que produce un proceso potencialmente infinito, propio de los conjuntos inductivos.

El filósofo francés Jean Cavaillès observa que se pueden dar propiedades no inductivas en los borelianos. Por ejemplo, cualquier conjunto B-medible, no numerable, contiene un subconjunto perfecto (Cavaillès, 1992, pág. 19). Para solucionar este inconveniente, Lusin introduce las noción de B-medible a través de funciones inyectivas, constituyendo el conjunto de los borealianos como un cuerpo cerrado. Para ello, se debe adoptar la *existencia constructiva de Lebesgue*, ocasionando un alejamiento de las concepciones intuicionistas, como lo pone de presente Lusin:

[17] Un número transfinito α de segunda clase es *efectivamente dado* si para todo $\beta \leq \alpha$ de segunda especie, se puede exhibir una sucesión de números transfinitos que converja a β.

> *Si se admiten todos los conjuntos B medibles es necesario admitir los conjuntos proyectivos como lo remarca con razón H. Lebesgue. Entonces si se quiere delimitar el análisis matemático al estudio de seres bien acabados y las relaciones mutuas bien determinadas, es necesario, entonces retornar al punto de vista empirista, sacrificar algunos conjuntos B medibles y también algunos irracionales* (Lusin, 1972, pág. 323).

Esto significa que no basta con establecer una pequeña negociación epistemológica para solucionar el problema planteado. O se sacrifica una parte del análisis clásico o se permite la entrada de objetos que atentan contra algunos principios existenciales intuicionistas. El problema se torna más complicado al entrar en juego el axioma de elección que da lugar a la denominada *existencia de Zermelo*, según las categorías existenciales establecidas por Lusin.

La demostración del teorema según el cual todo conjunto puede ser bien ordenado, desarrollada por Zermelo en 1904 (segunda versión en 1908),[18] despertó la crítica de Borel, Baire y Lebesgue, pues daba lugar a las demostraciones de existencia pura.[19]

Si bien Lebesgue no acepta las demostraciones de existencia pura, estableció una salida menos drástica que Borel y Baire al problema de existencia, a través de su noción de *lo nombrable*.

Al igual que Lusin, Lebesgue considera que aunque es un asunto de convención sólo es posible demostrar la existencia de un objeto previamente definido. Sus concepciones se encuentran planteadas de manera directa en su memoria de 1905:

> *Un objeto se define o se da cuando se ha pronunciado un número finito de palabras que se aplican a este objeto, es decir cuando se ha nombrado una propiedad característica del objeto* (Lebesgue, 1905).

Según Lebesgue, uno de los problemas en el desarrollo de las pruebas donde interviene una función de selección es que no se puede garantizar la unicidad de las escogencias.[20] Lebesgue plantea que no necesariamente un proceso de construcción asegura la identificación de los objetos de manera

---

[18] (Zermelo, 1904), (Zermelo, 1908).

[19] Esta controversia se encuentra consignada en (Baire, Borel, Hadamard, & Lebesgue, 1905).

[20] Esta cuestión era pertinente en 1904 debido a la falta de fundamentación de la teoría de conjuntos. El impasse fue solucionado con la incorporación de la primera axiomática de conjuntos en 1908 por parte de Zermelo.

concreta; ni siquiera la representación analítica es un lugar seguro para establecer cálculos; es el caso de la representación

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} [\lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}],$$

correspondiente a la función característica de los racionales, la cual no permite establecer cálculos directos con los números irracionales. De esta forma, las funciones aceptadas por Lebesgue no necesariamente sirven para establecer cálculos ni para obtener las imágenes correspondientes a cada valor de la variable independiente. Este es el sentido de la función definida por Lebesgue que escapa a la jerarquía de Baire y es la dirección en la cual define una teoría de la medida que rebasa los requerimientos existenciales de Borel; para ello se basa en la aceptación de los transfinitos de clase II como una totalidad y del método de la diagonal.

Esa concepción de existencia lo lleva a rechazar los conjuntos no medibles (en el sentido de Lebesgue):

> *En cuanto a la cuestión de la existencia de conjuntos no medibles, apenas si ha ganado progreso después de la edición de este libro. Sin embargo, esta existencia es cierta para aquellos que admiten un cierto modo de razonamiento basado en el llamado axioma de Zermelo. Por este razonamiento, se llega en efecto a esta conclusión: existen conjuntos no medibles; pero esta afirmación no debería ser considerada como contradictoria si se llega a mostrar que ¡jamás ningún hombre podrá nombrar un conjunto no medible! (Lebesgue, 1928, pág. 114).*

Lusin no sólo acoge la postura de Lebesgue, respecto al tipo de existencia en matemáticas, sino que también llama la atención en algunas dificultades que se presentan con el uso de las operaciones negativas. Por operaciones negativas se refiere a la diferencia y al complemento. Las operaciones negativas generan ciertos conjuntos como un todo sin una determinación específica. A los conjuntos generados por operaciones negativas Lusin los denomina *virtualidades*, es decir nociones que no definen objetos completamente acabados.

En el capítulo cinco de *Los Conjuntos Analíticos*, Lusin incorpora los conjuntos proyectivos, los cuales no admiten una definición positiva. Basado en esto, plantea que las consideraciones filosóficas del problema de existencia en matemáticas son siempre vagas e irresolubles de manera absoluta. El problema de existencia, para Lusin, se dirime en la actividad matemática como tal.

La salida de Lusin es sutilmente profunda si se tiene en cuenta que el formalismo y el logicismo se han mostrado insuficientes para dar cuenta del problema de existencia en matemáticas. Para Lusin el problema de fondo es como asumir la existencia de *virtualidades* más allá de lo nominal, de tal forma que pueda darse cabida a generalizaciones que no sólo dependan de las intuiciones básicas.

Al respecto Cavaillès incorpora la noción de *campo temático*. La *tematización* consiste en la "transformación de una operación en elemento de un campo operatorio superior..." (Cavaillès, 1992, pág. 173); dicho de modo sugestivo, la tematización establece la "objetivación de una operación". Esta categoría filosófica permite eludir los problemas del intuicionismo y del logicismo. La existencia en un campo temático se da en el proceso de interrelaciones. Los problemas del intuicionismo son esquivados porque no se exige que los objetos deban ser definidos cabalmente y sobre ellos establecer operaciones, sino que objetos y operaciones van ligados unos con otros. Relativo a esto surge el problema de establecer los procesos que den cuenta de los niveles de abstracción sin disgregar la sensación del entendimiento. En este sentido, para Cavaillès, no es posible situar el campo temático fuera del mundo, sino que corresponde a la transformación de él. Esto no implica el abandono de un simbolismo adecuado; significa tomar lo simbólico en su verdadera dimensión, como "extensión correlativa de la experiencia" (Cavaillès, 1992, pág. 174).

Jean-Louis Gardies[21] utiliza la tematización como categoría explicativa de los procesos de objetivación. Para Gardies la noción de *clase de equivalencia* constituye un vehículo conceptual que permite una tematización.

> Pero la tematización no presupone necesariamente el previo reconocimiento directo de una propiedad o de un conjunto de propiedades inmediatamente captadas en tanto que tales. Se llega más frecuentemente a aquello que es de acceso directo en tanto que tal sea una relación de equivalencia, donde el reconocimiento sugiere y justifica, entonces aquello de un nivel inmediatamente superior (Gardies, 2001, pág. 167).

Las extensiones numéricas se establecen a través de tematizaciones vía relaciones de equivalencias. Por ejemplo, si se parte de los números naturales, la tematización que faculta la obtención de los números enteros tiene como referencia una relación de equivalencia entre parejas ordenadas de naturales. A su vez otra relación de equivalencia entre enteros permite la

[21] (Gardies, 2001).

tematización de los racionales. Los números reales son tematizados a través de las cortaduras de racionales. Las operaciones en cada fase se definen como reflejo de la fase anterior, de tal forma que se pueda interpretar cada elemento de una fase como elemento de la siguiente. Lo anterior ubica automáticamente a los naturales, a los enteros y a los racionales como subconjuntos de los reales, eludiendo los problemas planteados por el intuicionismo.

La tematización del infinito en acto se soporta, como lo establecieron Dedekind y Cantor, definiendo una relación de equivalencia entre conjuntos con base a la equipotencia. La existencia de diferentes niveles de infinitos se demuestra a través de argumentos tipo diagonal de Cantor. Corresponde, como se mencionó antes, a una de las categorías existenciales planteadas por Lusin.

En (Lusin, 1972) Lusin establece las bases conceptuales de la teoría descriptiva de conjuntos utilizando procesos no constructivos. En este sentido, es importante llamar la atención sobre la visión de Lusin respecto al inevitable surgimiento de una clase de objetos cuya existencia no corresponde a ninguno de los tres primeros niveles planteados por él mismo. ¿Qué hacer con estos "nuevos entes"? Lusin considera improcedente la salida basada en el sacrificio de algunos conjuntos *B* medibles, pues ello deja por fuera parte del análisis cuya importancia es innegable. Para Lusin éste es un problema sin respuestas absolutas y el cual se dirime, como se ha dicho antes, en la actividad matemática misma. En el caso de los conjuntos proyectivos Lusin plantea dos posibilidades:

> O bien los estudios posteriores conducirán un día a las relaciones precisas entre conjuntos proyectivos, de modo que se tengan la solución completa los problemas relativos a la medida, categoría, potencia de estos conjuntos. A partir de este momento, los conjuntos proyectivos habrán conquistado la ciudadanía matemática, al mismo nivel que los problemas más clásicos de los conjuntos B medibles.
>
> O bien los problemas indicados sobre conjuntos proyectivos se quedarán sin solución aumentando la cantidad de problemas nuevos tan naturales como inabordables. De ese caso es claro que habrá que reformar nuestras ideas sobre el continuo aritmético (Lusin, 1972, pág. 324).

La posteridad ha entrado en concordancia con los planteamientos de Lusin; actualmente, la teoría descriptiva de conjuntos es una de las ramas más activas de la teoría de conjuntos con aplicaciones a la topología, la lógica matemática (teoría de la recursividad), la combinatoria, el análisis funcional y la teoría de grupos. Desde 1930 la masa de publicaciones ha ido en constante aumento. En orden cronológico, podemos citar, (Sierpinski, 1931), (Kunugi, 1935), (Novikov, 1934), (Sneider, 1945), (Choquet, 1959), (Davies, 1952), (Sion, 1961) y (Dellacherie, 1972), entre otros. El desarrollo de la teoría descriptiva de conjuntos también se hace evidente con la publicación de tratados específicos como (Sierpinski, 1950), (Stone, 1962), (Kuratowski, 1933), (Hoffman, 1970), (Moschovaquis, 1980) y (Kechris, 1994), entre otros.

La teoría descriptiva de conjuntos es de tratamiento obligado en los libros avanzados de topología y teoría de conjuntos. Tomando como referencia la notación incorporada por J. W. Addison en (Addison, 1959), se introducen a través de una escalera cuyo primer escalón corresponde a la colección B de todos los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$. Los *conjuntos analíticos* se definen como aquellos conjuntos que son imagen de elementos de B; los *conjuntos coanalíticos* son aquellos conjuntos que son complemento de los analíticos. Designamos por $\Sigma^1_1 = \{A \subset \mathbb{R}: A \text{ es analítico}\}$ y $\mathbf{\Pi}_1 = \{A \subset \mathbb{R}: A \text{ es coanalítico}\}$ y luego se procede de manera recursiva:

$$\Sigma^1_{k+1} = \{A \subset \mathbb{R}: A \text{ es imagen continua de un elemento } \mathbf{\Pi}^1_k\}.$$

$$\mathbf{\Pi}^1_{k+1} = \{A \subset \mathbb{R}: A \text{ es imagen continua de un elemento } \Sigma^1_k\}.$$

Esta cadena ascendente conforma la *jerarquía proyectiva* y un conjunto es *proyectivo* si pertenece a Σ^1_n o $\mathbf{\Pi}^1_n$, para algún numero natural *n.*

Al igual que para la conjetura de Baire, surge la pregunta sobre la categoría existencial de los conjuntos proyectivos, los cuales son conjuntos que se describen de manera sencilla a través de un proceso iterativo. Sin embargo, son de alta complejidad, pues a pesar de que los conjuntos analíticos Σ^1_1 y los coanalíticos π^1_1 son Lebesgue medibles, en $\mathbf{\Pi}^1_2$ encontramos conjuntos que no lo son. Para definir específicamente tales conjuntos es necesario asumir ZFC+AC (Teoría de conjuntos de Zermelo-Frankel y axioma de elección más el axioma de constructibilidad).

A partir de los trabajos de Gödel y del método del *forcing*, incorporado por Cohen, se evidenció que muchos enunciados de la teoría descriptiva de conjuntos son indecidibles. Desarrollos posteriores, debidos a Ronald Jensen, han mostrado que la teoría de los grandes cardinales tiene relación con la teoría interna de modelos.

Dado que la tematización del infinito actual le abre las puertas a la teoría descriptiva de conjuntos, se tiene que las categorías existenciales tipificadas por Lusin corresponden a planteamientos filosóficos que esbozan el problema de la existencia en matemáticas en toda su dimensión. Cuestión que para Michael Dummett, corresponde al problema central de la filosofía de la matemática (Dummett, 1998, pág. 5).

Como lo ha indicado Gardies, el surgimiento de objetos nuevos tematizados deja planteado el problema filosófico respecto a la naturaleza de estos objetos. La cuestión es si corresponden a "creaciones libres de la mente", como lo planteara Cantor, o se trata de entidades descubiertas. Por un lado, dado que la existencia de los objetos tematizados no corresponde al mismo tipo existencial del nivel sobre el que se apoyan, parecen constituir creaciones. Por otro lado, teniendo en cuenta que no se establecen de manera arbitraria, sino que están sometidos a algunos condicionamientos necesarios, parecen constituir descubrimientos (Gardies, 2001, pág. 175).

Los métodos utilizados por Lusin en la demostración de la conjetura de Baire, así como los desarrollos en los que emergen los conjuntos analíticos, se ubican en la perspectiva de este dilema. Pero éste es un problema que amerita un tratamiento aparte, pues corresponde a uno de los aspectos más controversiales de la filosofía de las matemáticas y plantea el interrogante sobre la relación objetividad-existencia. ¿Se debe demostrar primero que los objetos matemáticos existen o se debe entender primero su naturaleza?

Conclusiones

En su conferencia *Sobre el concepto de existencia en matemáticas*, Antonio Millán Puentes,[22] argumenta que el matemático debe ceder al filósofo el tratamiento del problema de la existencia en matemáticas, limitándose al tratamiento y estudio de los aspectos epistemológicos. Sin embargo, como hemos mostrado en los anteriores apartados, las concepciones ontológicas de las matemáticas se han venido ventilando a la par de los procedimientos epistemológicos. Precisamente uno de los aspectos que más llama la atención en el análisis de la obra de Baire, al igual que en Borel, Lebesgue y gran parte de los matemáticos franceses de inicios del siglo XX, tiene que ver con su preocupación por las cuestiones filosóficas de las matemáticas. Sus desarrollos están atravesados por una concepción ontológica de las matemáticas, específicamente sobre el tipo de procedimientos idóneos que permitan caracterizar los objetos como matemáticamente plausibles. Al respecto, Emile Picard, en su informe de la tesis de Baire, escribe:

> Nos parece que el autor tiene una inclinación favorable al estudio de aquellas cuestiones que están en la frontera entre la matemática y la filosofía y que hoy en día son respetables (Dugac, 1976, p. 341).

[22] Primer Congreso Nacional de filosofía, Mendoza, Argentina, 1949. www.filosofia.org/aut/003/m49a1601.htm

En primer lugar, habría que decir que Picard no está planteando una cuestión ingenua; Picard está referenciando una situación que se tornó costumbre en el desarrollo de las matemáticas y que abrió una brecha entre lo epistemológico y lo ontológico. Por diversas razones, imperó durante muchos siglos una ideología positivista en las matemáticas; se reivindicaba la idea de que lo importante eran los resultados, independientemente de los procesos, las técnicas y los objetos implicados. Lebesgue ha descrito muy bien este aspecto en la introducción del libro de Lusin *Les ensembles analytiques et leurs applications*:

> Cuando era estudiante, una vez servido el café pasábamos inmediatamente a abordar las ideas generales; la discusión se elevaba y parecía no tener fin cuando uno de nosotros exclamaba: "Oye tú, ¿existes? Digo tú por comodidad, pero sólo yo existo". Entonces nosotros comprendíamos que era necesario ir a trabajar y nos separábamos hasta el otro día. Con la aparición de Zenón y del mentiroso, los matemáticos comprendieron que era necesario retirarse; pero ellos no volvieron al día siguiente, se acabó el café. Incluso, muchos juraron que no se dejarían enredar en ello; se aplicaron a no decir nada que permitiera meterlos en una discusión filosófica (Lusin, 1930).

Esa aversión por la filosofía hizo que los matemáticos le dieran la espalda a las cuestiones ontológicas y se limitaran a los desarrollos epistemológicos; sin embargo, esa situación entró en crisis a finales del siglo XVIII con la discusión sobre los fundamentos del análisis, y se tornó insostenible a principios del siglo XX, con la controversia alrededor del axioma de elección, de la cual la obra de Baire es un testimonio importante.

Más allá de los tipos de existencia que podamos suscribir, el problema de la ontología de los objetos matemáticos puede verse intrínseca o extrínsecamente, dependiendo de si la discusión se realiza dentro de la matemática misma, o como parte del discurso filosófico genérico, del cual el conocimiento matemático sería un caso particular. Al respecto, Cavaillès es contundente:

> No hay definición ni justificación de los objetos matemáticos que no provenga de la matemática misma. (Cavaillès, 1992).

Posición que navega en contravía con la versión clásica, en la cual se asumía que desde la filosofía se debían trazar los delineamientos para una buena fundamentación de las matemáticas. Como se ha descrito antes, esto constituyó un escollo durante más de veinticinco siglos; los matemáticos, amarrados a la tradición aristotélica, abrieron un abismo profundo entre lo ontológico y lo epistemológico; entre lo legítimamente instaurado y el proceso que permitía resultados. En este sentido, más allá de los avances teóricos que se dieron a partir de la incorporación de la teoría de conjuntos cantoriana, el axioma de elección y la emergencia de la teoría de funciones, lo destacado de este proceso tiene relación con la apertura hacia la pertinencia de la discusión filosófica. Los matemáticos se dieron cuenta de que no debían seguir de espaldas a un problema que les compete. No se está sugiriendo aquí la obligatoriedad de este tipo de reflexiones, sino llamando la atención al hecho simple de que en cuestiones de la filosofía de las matemáticas, los matemáticos pueden intervenir con suficiencia. Ese es un legado importante de Borel, Baire y Lebesgue, pues, aunque se pueda criticar la ambigüedad y la falta de rigurosidad en sus planteamientos, lo cierto es que abrieron una brecha muy importante para la matemática moderna y para la filosofía de las matemáticas.

Eso no quiere decir que vamos a vetar la intervención de los filósofos. Se trata de construir puentes comunicantes entre lo ontológico y lo epistemológico. El lugar indicado para ello parece ser el interior mismo de la matemática. En esta dirección, un tipo de reflexión como ésta cobra sentido; se espera, no sólo sirva para comprender la dialéctica de la actividad matemática, sino también para hacer un aporte en la perspectiva de constituir un pensamiento matemático autónomo en nuestro medio.

Referencias bibliográficas:

Addison, J. (1959). "Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory". *Fund Math*, 123-135.

Aristóteles. (1977). "Física". En Aristóteles, *Obras* (F. Samarach, Trad., Segunda ed., Vol. I, págs. 565-704). Madrid, España: Aguilar.

Baire, R. (1899). "Sur les Fonctions de variables reélles". *Annali di matem.pura ed appl., 3*, 1-123.

Baire, R., Borel, É., Hadamard, J., & Lebesgue, H. (1905). "Cinq lettres sur la théorie des ensembles". *Bulletin de la Société Mathématique de France, 33*, 261-273.

Bolzano, B. (1991). *Paradojas del infinito.* México: Mathema.

Borel, E. (1898). *Méthodes et problèmes de la théorie de fonctions.* Paris: Guathier-Villars.

Cantor, G. (1995). *Contributions to the Founding of the Theory.* New York: Dover Publications.

Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta* (Primera edición 1883 ed.). (J. Ferreiros, & E. Gómez-Caminero, Trads.) Barcelona: Editorial Crítica, S.L.

Cavaillès, J. .. (1992). *Método axiomático y formalismo.* México: Servicios Editoriales, UNAM.
Chaves, A. (2006). *Las Clases de Baire en el surgimiento de los conjuntos analíticos.* Cali: Tesis de maestría, Universidad del Valle.
Choquet, G. (1959). "Ensembles K-analytiques et K-souliniens. Cas général et cas metrique". *Ann. Inst. Fourier, 9*, 75-81.
Davies, R. (1952). "Subsets of finite measure in anlytic sets". *Indag. Math. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser., A*(55), 488-489.
Dellacherie, C. f. (1972). *Ensembles anlytiques, capacités, mesures de Hausdorf. Lecture Notes in Math. No 295.* Berlin: Springer Verlag.
Dugac, P. (1976). Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire. Archive for History of Exact Sciences. 15(4), 297-383.
Dummett, M. (1998). "La existencia de los objetos matemáticos". *Teorema, XVII/2*. Valencia, España. Obtenido de http://sammelpunkt.philo.at:8080/1269/1/DUMMETT.pdf
Euclides. (1991). *Elementos* (Vol. I). (M. L. Castaños, Trad.) Madrid: Editorial Gredos, S. A.
Gardies, J. (2001). *¿Qu´est-ce que et pourquoi l'analyse? Essai de définition.* Paris: Librairie philosophique J. Vrin.

Gardies, J. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique.* Paris: Vrin.
Hoffman, J. (1970). *The theory of analytic spaces.* Aarhus: Various Publications Series, 10, Aarhus Universitet, Matematisk Institut.
Jech, T. (2003). *Set theory.* Berlin, Heidelberg, New York: The third millennium. Springer Verlag, Inc. Edition revised and expanded.
Kechris, A. (1994). *Classical Descriptive Set Theory.* New York: Springer-Verlag.
Keldych, L. (1940). "Démostration directe du théorème sur l'appartenance d'un élément canonique Eα `a la classe α et exemples arithmétiques d'ensembles mesurables B de classes supérieures". *Comptes Rendus (Doklady) de l'académie des Sciences de Comptes Rendus (Doklady) de l'académie des Sciences de l'URSS. , XXVIII*(8).
Kunugi, K. (1935). "La theorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits". *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, Math., 4*, 1-40.
Kuratowski, C. (1933). *Topologie. Vol. I.* Varsovia: Monografie Matematyczne, Warszawa.
Kuratowski, C. (1936). "Sur les théorèmes de séparation dans la théorie des ensembles". *Fund. Math., 26*, 183-191.
Lebesgue, H. (1905). "Sur les functions représentables analytiquement". *Journal de Math. Pures et Appl., 6*(1), 139-216.
Lebesgue, H. (1928). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* New York: Chelsea publishing company Bronx.
Lusin, N. (1914). "Sur un problème de M. Baire". *C.R. Acad. Sci. Paris*(158), 1258-1261.
Lusin, N. (1917). "Sur la classification de M. Baire". *C.R. Acad. Sci. Paris*(164), 91-94.

Lusin, N. (1921). “Sur l’existence d’un ensemble non dénombrable qui est de premi`ere catégorie dans tout ensemble parfait”. *Fund. Math.*, 155-157.
Lusin, N. (1927). “Remarques sur esembles projectifs”. *C.R. Acad. Sci. Paris*(185), 835-837.
Lusin, N. (1927A). “Sur les ensembles analytiques”. *Fund. Math.*(10), 1-95.
Lusin, N. (1930). Les ensembles analytiques et leurs applications. Paris: Gauthier-Villars.
Lusin, N. (1972). *Les ensembles analytiques et leurs applications.* New York: Segunda edición Chelsea Publishing Company.
Moore, G. (1982). *Zermelo’s Axiom of Choice.* New York: Springer-Verlag.
Moschovaquis, Y. (1980). “Descriptive Set Theory”. *Stud. Logic Foundations Math. 100.* Amsterdam-New York: North Holland Publishing Co.
Novikov, P. (1934). “Généralisation du deuxième principe de separabilité”. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS*(4), 8-11.
Recalde. L. & Arboleda, L. C. (2005). “El concepto de semicontinuidad de Baire”. *Matemáticas. Enseñanza Universitaria, XIII*, 63-82.
Sierpinski, W. (1931). “Les ensembles analytiques comme cribles au moyen des ensembles fermés”. *Fund. Math.*(17), 77-91.
Sierpinski, W. (1950). *Les ensembles projectifs et analytiques.* Paris: GhautierVillars.
Sion, M. (1961). “Continuous images of Borel sets”. *Proc. Am. Math. Soc.*(12), 385-391.
Sneider, V. (1945). “Teoría descriptiva de conjuntos en espacios topológicos”. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*(50), 77-79.
Stone, A. (1962). *Non-separable Borel sets.* Warszawa: Rozprawy Matematyczne.
Zermelo, E. (1904). “Proof that every set can be well-ordered”. En J. Van Heijenoort, *From Fregue to Gödel.. A Sorce Book in mathematical logic 1879-1931* (págs. 139-141). Cambridge: Harvard University Press.
Zermelo, E. (1908). “A New proof of the possibility of a well-ordering”. En J. Van Heijenoort, *From Fregue to Gödel. A Source Book in mathematical Logic, 1879-1931.* (págs. 183-198). Cambridge: Harvard University Press.