TEORÍA KANTIANA DEL ESPACIO, GEOMETRÍA Y EXPERIENCIA[*][†]

Germán Guerrero Pino
Universidad del Valle

"Ciertamente, se rendiría mejor tributo a Kant si, a la vista de la física moderna, se abandonase el contenido de sus proposiciones y, siguiendo el gran plan de su sistema, se buscasen condiciones de experiencia en nuevos terrenos, en lugar de adherirse dogmáticamente a sus afirmaciones específicas. No puede ya defenderse, por reverencia, toda palabra de Kant, cuando una nueva ciencia física llama a la puerta de la filosofía"
H. Reichenbach (1921)

RESUMEN

El presente escrito muestra que Kant no tenía razón al afirmar que los axiomas de la geometría son juicios sintéticos *a priori*, tesis que constituye un punto fundamental de partida en la elaboración de su propuesta epistemológica y en su reflexión filosófica sobre el espacio y la geometría euclídea. La tesis falla en dos puntos: uno, al afirmar que los axiomas de la geometría tienen una validez apodíctica; y dos, al implicar que el conocimiento de la estructura espacial del mundo se obtiene de forma *a priori*, independientemente de la observación y la experiencia. La aparición de las geometrías no euclídeas refuta la primera parte de la tesis y deja en vilo a la segunda; y, finalmente, la segunda parte de la tesis se va al traste con la teoría general de la relatividad de Einstein. Para lograr lo anterior, y teniendo siempre como referencia las ideas del propio Kant, se recurre a una exposición orientada históricamente por las ideas de los principales protagonistas del debate: Euclides, Newton, Leibniz, Kant, Poincaré y Einstein.

Palabras clave: Espacio, geometría, Kant, experiencia y Einstein.

---

[*] **Recibido** Marzo de 2005; **aprobado** Mayo de 2005.

[†] El presente artículo hace parte de la investigación que vengo adelantando bajo el título "Problemas en torno a la dicotomía teoría/observación" y tiene como punto de partida las distintas notas en las que se basó la conferencia que ofrecí, con el mismo nombre, en *Lunes de debate*, organizado por el Departamento de Filosofía de la Universidad del Valle, en octubre de 2004, para conmemorar los 200 años de la muerte de Kant.
Dedico este artículo a los distintos asistentes al seminario del grupo de investigación *Episteme: Filosofía y Ciencia,* el cual coordino, y también a mis estudiantes del seminario *Problemas filosóficos del espacio.*

ABSTRACT

In this paper I show that Kant had not reason to claim that the principles of geometry are synthetic judgments *a priori*. This thesis is the starting point of Kant's epistemology and of his philosophical reflection about space and Euclidean geometry. The Kant's thesis fails in two points: one, when he claims that the axioms of geometry have an apodeictically certain; and two, when he claims that the knowledge of the structure of physical space is *a priori*, independent of observation and experience. The development of non-Euclidean geometries carries to refute the first part of Kant's thesis and leave the second part up in the air. This second part of Kant's thesis fall through with Einstein's general theory of relativity. I present these different ideas and thesis with in a historical perspective, explaining and justifying the principal ideas of Euclides, Newton, Leibniz, Kant, Poincaré and Einstein, the main character in this debate. And finally, I contrast these ideas with Kant's approach, in all moment.

Key words: Space, geometry, Kant, experience and Einstein.

1. Introducción

El presente escrito busca exponer, en un primer momento, la teoría kantiana del espacio como un homenaje particular a los 200 años de la muerte de Kant (1724-1804). El título recoge esta inquietud y está complementado con el titulo del escrito de Einstein "Geometría y experiencia" (1921), intentando mostrar la dimensión crítica del presente escrito con los planteamientos kantianos. Así que obviamente el centro de atención de la exposición será la teoría kantiana del espacio tratando de hacer honor a este gran filósofo, y lo que intento mostrar es que la aparición de las geometrías no euclídeas y la consolidación de la teoría de la relatividad general de Einstein rechazan o niegan, por una parte, la tesis fundamental de la epistemología kantiana de la existencia de juicios sintéticos *a priori* en la geometría, como una ciencia de la naturaleza, y, por la otra, y de manera más directa, que el espacio físico sea un espacio euclídeo.

Tal y como intentaré mostrar, realmente la geometría va a jugar un papel importante dentro del pensamiento kantiano desde muy temprano, cuando él empieza a introducirse en estos temas filosóficas, y prácticamente hasta el desarrollo mismo de su gran obra filosófica, la *Crítica de la razón pura* (1781, 1787). Considero que el tema se puede plantear de muchas maneras, pues tiene que ver con cuestiones como cuál es el tipo de espacio físico que existe realmente, cuál es la relación entre geometría física y geometría pura (una distinción que no tuvo presente Kant), cómo poder trazar ese tipo de distinción y, finalmente, la fortaleza de los argumentos en contra de los juicios sintéticos *a priori* kantianos.

Igualmente veremos que este tema recorre buena parte de la historia de la ciencia de occidente, pues la geometría aparece con Euclides en el siglo III a.c. y esta rama del saber, tal y como él la entendía, tiene que ver con el espacio. Abordaremos la defensa de Newton de un espacio real y absoluto, para después ver las fuertes críticas que hace Leibniz a esta concepción. Las ideas de estos pensadores forman el contexto en el que se presentarán las reflexiones kantianas sobre el espacio y los juicios sintéticos *a priori*. Veremos que el tema aparece más recientemente en las teorías de la relatividad especial y general de Einstein, formuladas en 1905 y 1916, respectivamente, cuyas implicaciones filosóficas se construyen sobre lo que se ha dado en llamar el reto convencionalista de Poincaré, planteado a comienzos del siglo XX, en 1902 aproximadamente.

Por último, considero que las palabras de Reichenbach, que aparecen en el epígrafe de este escrito, son respetuosas con el trabajo de Kant y enfatizan la importancia de ser crítico con el trabajo de este gran filósofo, como con el de cualquier otro. Así pues, el honor más grande que se le puede hacer a Kant es ser crítico con sus ideas, por tanto no pretendo ser dogmático con sus planteamientos, sino examinar críticamente sus tesis importantes y determinar donde fallan. De modo que nos espera una travesía un poco complicada y larga dado el interés y la envergadura del tema.

2. Euclides: geometría y espacio físico[1]

Creo que es conveniente comenzar con un pequeño análisis de ciertas particularidades sobre la forma como los griegos entendieron la geometría, las cuales podemos ubicar de un modo bastante preciso en la obra de Euclides, esto es, en su libro *Elementos* (escrito hacía el año 300 a.c., y también conocido como *Elementos de la geometría*[2]). Para

[1] Las ideas de este apartado las he desarrollado más extensamente en mí escrito Guerrero [2005].

[2] "Desde hace tiempos se habla de los Elementos de la geometría de Euclides, como si el géometra griego hubiera escrito una obra llamada "Elementos de la geometría". No hay tal. Las obras citadas en la bibliografía para este capítulo, se titulan invariablemente Elementos, lo cual es correcto, desde el punto de vista histórico; parece, en efecto, que la obra se llamaba Enseñanza de los elementos: *stoijeíosis* (según la transcripción que se puede hacer a la fonética española) y se la llamaba comúnmente elementos: *stoijéia*" (Campos [1994], p.1.).

Euclides la geometría es una investigación del espacio físico que nos rodea, la cual es susceptible de ser presentada como una construcción formal. Así que los *Elementos* es un estudio sobre las propiedades del espacio físico real y sus relaciones, antes que ser una obra abstracta y formal. Por tanto, la geometría griega no es del todo abstracta, el geómetra no sólo trata con conceptos o definiciones, también se ocupa de la existencia y construcción de los objetos de los que tratan estos conceptos o definiciones. Las palabras de Aristóteles son muy significativas en este sentido: "un geómetra indicará por medio de una definición qué cosa significa la palabra triángulo; más que un triángulo exista o que sea posible construirlo, y que sea por ende lícito sacar consecuencias del hecho de haberlo construido, es una verdad que no viene ni admitida ni probada por medio de la definición, y que debe ser supuesta o demostrada aparte"[3] . Esto es, para los griegos los conceptos (términos o definiciones) geométricos "tienen un significado *real* antes que *nominal*, esto es, valen para indicar un objeto al cual se atribuye de cualquier modo, existencia fuera de nosotros en un mundo inteligible"[4] . Esto también se deja ver a partir de la manera como los griegos entendían los principios de la geometría; para éstos antes que ser principios abstractos, "en el postulado se trata de exhibir mediante una construcción una propiedad sencilla, fácil de captar [del espacio o las figuras espaciales]"[5] . Por tanto, no hay duda de que el espacio físico real es el que estudia la geometría y no un espacio diferente a éste.

Podríamos decir que este fuerte vínculo establecido entre geometría y espacio físico, mediado por la experiencia, es una constante que se

[3] Aristóteles, *Analítica posterior*; citado desde Enriques [1924], p. 35.
[4] Enriques [1924], p. 25.
[5] Campos [1994], p. 15. Lo del paréntesis es mío. Esta tesis se puede reforzar con las siguientes palabras de Gray: "las demostraciones geométricas de los griegos eran factibles gracias a las hipótesis que hacían respecto al espacio subyacente, que se encuentran reflejadas en los conceptos de congruencia, semejanza, paralelismo y la posibilidad de efectuar construcciones geométricas" (Gray [1992], p. 47). Que Newton se une a esta tradición, en lo general, se deja ver aquí: "la descripción de las líneas rectas y los círculos sobre la cual se basa la geometría pertenece a la mecánica. La geometría no nos enseña a trazar esas líneas, aunque requiere que sean trazadas, pues exige que el aprendiz aprenda primero a describirlas con precisión antes de entrar en la geometría, mostrando luego cómo pueden resolverse los problemas de esas operaciones. Describir líneas rectas y círculos es un problema, pero no un problema geométrico. Se exige de la mecánica la solución de ese problema, y cuando está resuelto, la geometría muestra la utilidad de lo aprendido; y constituye un título de gloria para la geometría el hecho de que a partir de esos pocos principios, recibidos de otra procedencia, sea capaz de producir tantas cosas" (Newton [1687], pp. 199-200).

mantiene desde los griegos -concretado en la geometría euclídea- hasta Kant, pasando por Newton; vínculo que, precisamente, se va a cuestionar con la aparición de las geometrías no euclidianas. Así, un efecto importante de estas geometrías fue romper con este principio de equivalencia entre el espacio de la geometría y el espacio físico. Esta idea queda bien establecida en las siguientes palabras de Campos: "cuando se cree que las verdades de la geometría euclidiana concuerdan universalmente con la experiencia, se cree también que tal geometría es la única posible, es connatural con la manera de percibir de los seres humanos. Los *Elementos*, el texto de Euclides, representa para Kant la ciencia, en estado de derecho, bien constituida, no con juicios analíticos sino sintéticos *a priori*"[6] .

El análisis alrededor del quinto postulado nos permitirá igualmente ver que lo que se hace en geometría tiene de alguna manera relación con los objetos de la experiencia. La larga e interesante historia del problema del quinto postulado de la geometría de Euclides, el así llamado postulado[7] de las paralelas (que en un lenguaje moderno corresponde a: por un punto exterior a una recta pasa *una y sólo una* paralela a dicha recta) tiene que ver con la aparición de geometrías no euclídeas y con el origen de la distinción entre geometría pura y física, tal y como se mostrará más adelante.

Los *Elementos* de Euclides (330-275 a.c.) se abren con 23 definiciones, en las que se definen la mayoría de los conceptos básicos, cinco postulados y cinco ideas comunes. Los postulados se ocupan expresamente de los conceptos (términos o definiciones) que los preceden. A continuación aparecen estos cinco postulados en un lenguaje un tanto moderno y tal como se encuentran en la traducción que hace Federico Enriques del texto griego (en la edición crítica de Heiberg)[8] :

[6] Campos [1994], p. 7.

[7] Siguiendo el estudio de Federico Enriques [1924], pp. 35 y 39, empleo el término 'postulado' (que actualmente hacemos equivalente a 'axioma') y no 'axioma', porque esta última expresión se emplea en los *Elementos* de Euclides como equivalente a "noción común", que no es lo mismo que axioma en sentido moderno.

[8] Enriques [1924], pp. 36 y 37. Sobre el tipo de lenguaje empleado en la traducción, Enriques dice que "la divulgación de los *Elementos* que se ofrece es bastante fiel para que los lectores puedan apreciar el sabor de la obra griega, y que por otra parte es bastante libre para haber adoptado tal vez expresiones del lenguaje geométrico que son más breves y familiares a nuestro oído" (Enriques [1924], p. 10).

1-2
Se pide: que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto.
Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente *por derecho*.
3
Y que, con cualquier centro y cualquier distancia, se pueda describir un círculo.
4
Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.
5
Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos.

Hay que tener presente que actualmente decimos "segmento de recta" y no "recta limitada", reservando la palabra "recta" para algo infinito. De acuerdo con esto, podemos reinterpretar los dos primeros postulados del modo siguiente: por dos puntos cualesquiera pasa una y sólo una recta.

La formulación del quinto postulado, tal y como aquí aparece enunciado, no corresponde a la actual (por un punto exterior a una recta pasa una única paralela), pero su equivalencia está claramente establecida en los *Elementos*. Parece ser que Proclo (412-482) fue el primero en enunciar el quinto postulado de esta forma familiar y la razón de su mayor aceptación parece estar en que: es el resumen del postulado más claro a los ojos modernos, los comentaristas de la nueva generación lo consideran la mejor expresión de la posición de Euclides[9], y "puede ser reformulado fácilmente para sugerir geometrías no euclidianas, negando bien la existencia o bien la unicidad de las paralelas"[10].

El problema con el quinto postulado radicaba en que a todo el mundo le parecía que los cuatro primeros postulados eran evidentes por sí mismos, cosa que no sucedía con el quinto. Les parecía que este postulado no era del todo intuitivo, ya que, por ejemplo, para la situación descrita en el quinto postulado, si la suma de los ángulos internos es un poco menor que 180º, el punto de intersección de las dos rectas está tan alejado, que nuestra intuición nos sería de muy poca ayuda. Desde luego que esta objeción también puede expresarse en términos de la noción de rectas paralelas: de acuerdo con la definición, las paralelas son rectas situadas en un mismo plano, que al prolongarse indefinidamente nunca se cortan, por tanto, y puesto que nuestra intuición es limitada, cabe preguntarse si realmente existen las paralelas y, en caso afirmativo, si

[9] Gray [1992], p. 58.
[10] *Ibíd.*

existe una única paralela a una recta dada y a punto dado. Más adelante retomaré esta discusión al hablar del origen de las geometrías no euclidianas.

3. Newton y Leibniz: espacio absoluto y concepción relacional del espacio

Demos un salto gigantesco en el tiempo y pasemos a otra época, al año de 1687, cuando Newton publica su gran obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Este es un libro enteramente de física, pertenece así a las ciencias de la naturaleza, y Newton presenta este libro a la manera de los *Elementos* de Euclides. Los *Elementos* se convierte en paradigma para la construcción de los *Principia* de Newton, y éste último, a su vez, se convertirá en modelo para la construcción de toda teoría física durante los siglos XVIII y XIX, y prácticamente hasta comienzos del siglo XX. Podemos decir que este modelo euclídeo de axiomatización se rompe con la aparición de la mecánica cuántica, puesto que esta teoría física realmente no se construye a la manera de los *Elementos*[11] .

Destaco este aspecto general del trabajo de Newton dada su trascendencia histórica. Otro aspecto más particular de su obra que quiero mostrar es el lugar donde aparece su concepción de espacio y tiempo, para así presentar los detalles de su concepción del espacio absoluto y también para discutir qué tan importante va a ser esta concepción dentro de su tema de la mecánica.

El libro *Principia* empieza por ciertas definiciones, a la manera de los *Elementos*; se define cantidad de materia (masa), cantidad de movimiento, inercia, fuerza impresa, fuerza centrípeta, etc., en total se presentan ocho definiciones, y enseguida aparece una pequeña disertación llamada "Escolio" en la que Newton expone sus nociones de espacio y tiempo. El resto de la obra, lo cual menciono simplemente por curiosidad, contiene: los axiomas sobre el movimiento (las tres famosas leyes de Newton); a continuación aparece el Libro I, que se inicia con una serie de lemas, en los que Newton construye el cálculo de fluxiones (la primera versión de lo que hoy conocemos como cálculo diferencial), toda una matemática con la que no se contaba hasta entonces; en seguida, en este mismo libro, aparece una serie de proposiciones y teoremas en los que

[11] Podemos decir que las teorías físicas clásicas se construyen teniendo como modelo el enfoque sintáctico-axiomático de las teorías empíricas, mientras que la mecánica cuántica lo hace a la luz del enfoque semántico. Mejor dicho, una de las virtudes de esta última teoría es que introduce precisamente dicho enfoque. Para profundizar más en estas cuestiones remito a mis escritos Guerrero [2001] y Guerrero [2004].

Newton desarrolla toda su mecánica en forma abstracta, matemática, y al estilo de la geometría de Euclides. Es hasta el libro III, “Sistema del mundo (matemáticamente tratado)”, donde se deja ver en forma explícita que todo lo hecho anteriormente se aplica al mundo natural. Aquí es donde demuestra, por ejemplo, que los planetas girando al rededor del Sol describen órbitas elípticas y que los satélites también describen órbitas elípticas.

En el “Escolio” sobre el espacio y el tiempo Newton presenta, desarrolla y sustenta, en parte, su concepción de espacio absoluto[12]. Decimos que para Newton *el* espacio es absoluto porque existe a la manera como existen los cuerpos físicos (el espacio es tan real como estos), pero en forma independiente de estos. Además, este espacio trasciende, o va más allá de, la información que nos proporcionan los sentidos y la experiencia; el espacio es inobservable.

Para Newton, hay que diferenciar entre el **espacio aparente** (relativo) y el **espacio real** (verdadero): el espacio aparente nos lo proporcionan los sentidos en tanto que el espacio real es el espacio absoluto, tal y como él lo concibe. El espacio físico absoluto de Newton tiene las siguientes características.

a) “El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil”[13]. El espacio está en reposo absoluto (o con un movimiento rectilíneo uniforme) y no sufre ningún tipo de modificación, es un agente que actúa por sí mismo pero sobre el cual no se puede actuar.
b) “Todas las cosas están situadas… en el espacio según el orden de situación”[14]. En términos ontológicos, el espacio es anterior a los cuerpos: no sólo los contiene a todos, sino que seguiría existiendo aun cuando todos ellos desaparecieran.
c) Es inobservable, “las partes del espacio no pueden verse o distinguirse de otras mediante nuestros sentidos”[15], “es realmente dificilísimo descubrir y distinguir de modo efectivo los movimientos verdaderos y los aparentes de los cuerpos singulares, porque las partes del espacio

[12] En lo que sigue de la exposición sobre Newton sólo hago referencia explícita al espacio, que es el tema que aquí interesa, pero no hay que perder de vista que dentro del sistema de la mecánica de Newton la noción de tiempo absoluto desempeña un papel tan fundamental como la de espacio absoluto.
[13] Newton [1687], p. 229.
[14] *Ibíd.*, p. 231.
[15] *Ibíd.*

inmóvil donde se realizan esos movimientos no son observables por los sentidos”[16].

Por tanto, el espacio es muy parecido a un cuerpo material pero de naturaleza un tanto etérea, y éste puede pensarse como vacío, pero los cuerpos no pueden existir fuera del espacio. En definitiva, el espacio absoluto es infinito, homogéneo, isótropo y euclídeo (tiene una métrica euclídea). Finalmente, no hay duda en que Newton tiene la convicción de que si se dieran las condiciones físicas necesarias podríamos tener acceso de un modo sensible o por medio de experimentos al espacio absoluto: “es posible que en las región de las estrellas fijas, o aún más lejos, pueda existir algo que esté en absoluto reposo”[17].

Ahora bien, ¿qué es lo que lleva a Newton a defender esta particular concepción del espacio? Bien podría decirse que esta imagen particular del espacio desarrollada por Newton coincide bastante bien con la que uno se forma de manera un tanto intuitiva; pero lo cierto es que, desde un punto de vista conceptual, tenemos que decir lo contrario: los conceptos y principios sobre los cuales Newton levanta la mecánica, lo llevan a desarrollar un espacio absoluto. Newton se ve en la necesidad lógica de adjudicar una existencia independiente y real al espacio físico por la importancia que tiene dentro de sus sistema la noción de reposo o, si se quiere, la de movimiento rectilíneo uniforme o, también si se quiere -dada la estrecha relación conceptual de estas tres nociones-, la de aceleración. Estas nociones, y por supuesto en conjunción con las leyes, implican que es posible determinar ya sea el reposo o la velocidad o la aceleración de un cuerpo en términos absolutos; o, a la inversa, las leyes de Newton no tendrían ningún sentido sin el concepto de espacio absoluto (y el de tiempo absoluto, desde luego). Pero, además de esta necesidad lógica, en Newton también encontramos una necesidad ontológica de introducir el espacio absoluto, tal y como se mencionó más arriba: tanto

[16] *Ibíd*. p. 234.

[17] *Ibíd*. p. 231. John Keill, de la Universidad de Oxford y uno de los primeros defensores de la física newtoniana de la época, hace la siguiente descripción del espacio absoluto de Newton, bastante llamativa: “concebimos que el espacio es aquello donde se colocan todos los cuerpos… que es enteramente penetrable, recibiendo a todos los cuerpos en él, y no negando el acceso a ningún tipo de cosa; que está inalterablemente fijo, incapaz de ninguna acción, forma o cualidad; cuyas partes no es posible separar una de otras, por grande que sea la fuerza que se aplique; más el espacio, siendo él mismo inmóvil, acepta las sucesiones de las cosas en movimiento, determina las velocidades de sus movimientos y mide distancias de las cosas mismas” (En su libro *An Introduction to Natural Philosophy*, 1758. Mencionado en van Fraassen [1970], p. 134).

las cosas como sus acontecimientos se dan en (o dentro de) un espacio absoluto.

A esta concepción de espacio se le opuso, casi de manera simultánea a su presentación, el gran filósofo Leibniz. Éste desarrolla una concepción de espacio relacional, de acuerdo con la cual el espacio en realidad no existe, éste simplemente es un concepto, una idea, pero que como tal no hay nada real que le corresponda. La idea de espacio la obtenemos a partir de la relación de coexistencia entre los objetos.

Leibniz no sólo tiene una concepción distinta a la de Newton, sino que además le parece completamente inaceptable su idea de espacio absoluto por sus implicaciones dentro de la filosofía natural, pero por sobretodo dentro del campo de la teología natural. En la filosofía natural, Leibniz considera que el espacio absoluto es un concepto metafísico innecesario, en tanto que en la teología natural éste concepto o, mejor, entidad, dado su carácter real, lleva a un imagen errada de Dios, en el mejor de los casos, y en el peor, lo identifica con el espacio mismo.

Leibniz cree que en ambos casos nos la podemos arreglar bastante bien con un espacio que más que ser real es conceptual, "el espacio como una cosa puramente relativa… como un orden de coexistencia. Pues el espacio señala en términos de *posibilidad* un orden de las cosas que existen al mismo tiempo, en tanto que existen conjuntamente, sin entrar en sus peculiares maneras de existir; y en cuanto vemos varias cosas juntas, nos damos cuenta de este orden de cosas entre ellas"[18]. Así, para Leibniz, el espacio no es sino un sistema de relaciones, desprovisto de existencia metafísica u ontológica. Los cuerpos existentes definen unas relaciones de distancia o situación a partir de las cuales construimos los conceptos de lugar y espacio, pero estos no refieren a

[18] Leibniz [1715 y 1716], p. 68. La cursiva es mía y busca subrayar la oposición entre lo que es meramente posible (conceptual, podríamos decir) y lo real. En el siguiente párrafo, que pertenece a la Quinta carta de Leibniz a Clark (discípulo de Newton), y que sería la última carta de la interesante disputa epistolar que mantuvieron, entre noviembre de 1715 y octubre de 1716, sobre las distintas cuestiones relacionadas con las nociones de espacio que defendían, Leibniz, digo, describe bastante bien la forma como llegamos a la noción de espacio: "veamos cómo los hombres vienen a formarse la noción de espacio. Consideran que varias cosas existen a la vez y encuentran cierto orden de coexistencia, según el cual la relación de unos con otros es más o menos simple. Este orden es su *situación* o distancia. Cuando acontece que uno de esos coexistentes cambia en esa relación con respecto a multitud de otros, sin que éstos cambien entre ellos, y que un nuevo cuerpo que llega adquiere la misma relación que el primero había tenido con los otros, se dice que ha venido a ocupar el lugar del primero y se llama a ese cambio un movimiento que está en aquel en el que está la causa inmediata del cambio. Y cuando

nada existente por sí mismo. En términos ontológicos, no hay nada más que cuerpos y a partir de ellos podemos encontrar ciertas relaciones entre los mismos; en tanto que para Newton hay espacio y cuerpos, incluso para él, el espacio es ontológicamente anterior a los cuerpos.

Aquí vale la pena hacer una reflexión filosófica, semántica, interesante, y es que creemos normalmente que todo aquello que no existe no puede ser nombrado, y uno salta de allí a decir que todo lo que es nombrado efectivamente tendrá que existir. Entonces, como se habla de espacio, pues necesariamente debe haber algo a lo que refiere ésta palabra, esto es, debe existir una entidad llamada *espacio*. A partir de la discusión anterior, vemos que no tiene que ser así, hay muchos ejemplos del sentido común que nos muestra que podemos tener expresiones que no refieren a ninguna entidad en el mundo, por ejemplo, la palabra *unicornio*: uno puede hablar perfectamente de unicornios de manera significativa, pero sabemos que no hay ninguna entidad en el mundo que sea un unicornio. Un caso parecido para la reflexión filosófica es que Newton, de alguna manera, está apoyando la idea de que si hablamos del espacio tiene que haber algo en el mundo con lo que se corresponda, pero hemos visto, con Leibniz, que podemos hablar del espacio de manera significativa sin que tengamos que casarnos con la existencia del espacio como tal.

4. Kant: planteamientos anteriores a su teoría sistemática del espacio

En términos generales, podríamos decir que el debate entre la concepción newtoniana de un espacio absoluto y la leibniziana del espacio como simple relación, conforma el contexto principal y de partida en el que va a trabajar Kant. Veremos cómo Kant en una primera etapa vacila entre el realismo newtoniano y el conceptualismo leibniziano, para después, en una segunda etapa, elaborar su propia alternativa, una manera bastante particular de fundar sus ideas sobre el espacio, que va a ser completamente diferente a las dos maneras planteadas hasta el momento.

varios, o incluso todos, cambiasen según ciertas reglas conocidas de dirección y de velocidad, se puede siempre determinar la relación de situación que cada uno adquiere con respecto a los demás, e incluso aquel que cada otro tendría o que tendría con respecto a cada otro si no hubiera cambiado o si hubiera cambiado de otra manera. Y suponiendo o imaginando que entre dichos coexistentes hubiera un número suficiente de ellos que no hubiesen sufrido cambio en sí mismos, se dirá entonces que aquellos que tienen una relación con estos existentes fijos igual a la que otros habían tenido antes con ellos, ocuparán el *mismo lugar* que dichos otros habían ocupado. Y aquello que comprende a todos esos sitios es llamado *espacio*” (Leibniz [1715 y 1716], p. 112).

La principal peculiaridad de la propuesta kantiana sobre el espacio es que antes que fundamentarse en una reflexión dentro de la filosofía natural (hoy diríamos la física), lo hace en una reflexión filosófica o, mucho mejor, eminentemente epistemológica, cosa que no sucede ni con Newton ni con Leibniz.

En otros términos, yo creo que en la novedosa propuesta kantiana, la cual queda concretada en su magna obra *Crítica de la razón pura*, si bien va a predominar el carácter absoluto del espacio, la tesis fundamental de Newton, esto será así pero obviamente en un contexto completamente distinto. El aporte de Kant es ingenioso en la medida que rompe con la tradición en lo que tiene que ver con la noción de espacio pero, sobretodo, al fundamentar su concepción de espacio en una nueva epistemología, produciendo así una gran revolución en el momento. Veremos, en grandes líneas, en qué consistió esta revolución.

Comencemos entonces con algunos detalles de su primera etapa, ciertos planteamientos anteriores a su teoría sistemática del espacio. En su escrito *Sobre el modo correcto de calcular las fuerzas vivas* (1746), Kant adopta en gran parte la concepción relacional de Leibniz y especula sobre la base física de la dimensionalidad del espacio: la estructura del espacio tiene como base física las fuerzas que los cuerpos ejercen unos sobre otros. La tridimensionalidad del espacio se debe a que estas fuerzas varían inversamente con el cuadrado de la distancia entre los cuerpos, tal y como plantea la ley de gravitación de Newton. Posteriormente, en "Sobre el fundamento primero de la distinción de las regiones del espacio" (1768), Kant defiende la realidad del espacio físico, a la manera de Newton, pues dice: "mi meta en este trabajo es investigar si no hay que encontrar en los juicios sobre la extensión, tales como los contenidos en la geometría, una prueba evidente de que el espacio tiene una realidad propia, independiente de la existencia de toda materia, e incluso del primer fundamento de la posibilidad de la composición de la materia"[19]. En este trabajo, Kant basa su prueba de la existencia del espacio en la distinción entre izquierda y derecha, pues dice, en un tono claramente antileibniziano: "si esta diferencia no puede explicarse como la mera apariencia de una relación diferente en el orden o en la disposición mutua de las partes, entonces únicamente puede hacerse mediante la suposición de una disposición diferente con respecto al espacio absoluto"[20]. Para Kant, este descubrimiento refuta de modo concluyente la concepción

[19] Tomado de Jammer [1954], p. 172.
[20] *Ibíd*.

relacional del espacio. Este mismo tipo de argumento aparecerá posteriormente en su texto *Prolegómenos a toda metafísica futura que haya de poder presentarse como ciencia*, (1783), §13, el pequeño escrito que publicó dos años después de la primera edición de la *Crítica de la razón pura*, con el propósito de hacer más comprensibles las principales tesis que allí aparecían.

En este escrito de 1768, Kant desarrolla las "contrapartidas incongruentes" para reforzar la idea del espacio absoluto. Un ejemplo de *contrapartidas incongruentes* se encuentra en el hecho de no poder superponer nuestra mano izquierda sobre la derecha. Pero esto se debe a la imposibilidad de mover, de *girar*, una de nuestras manos en una cuarta dimensión (de un espacio tetradimensional) para cambiar su orden. Este tipo de movimiento lo podemos hacer con *objetos* de una o dos dimensiones en nuestro espacio tridimensional; así, por ejemplo, los lados izquierdo y derecho de una recta se pueden intercambiar girando la recta sobre un plano, y el sentido de giro de las agujas de un reloj se cambia *girando* la superficie (el reloj) en la otra dimensión del espacio tridimensional. Ahora bien, la aparente fuerza de este argumento no tiene que ver con la existencia de un espacio absoluto, tal y como pensaba Kant, sino con el carácter tridimensional del espacio, que no es lo mismo. Esto es, por una parte, la tridimensionalidad es una característica topológica (y no métrica) del espacio y, por la otra, esta propiedad puede igualmente derivarse a partir de una noción de espacio como relación entre cuerpos tridimensionales.

En la disertación latina *Sobre la forma y los principios del mundo sensible y el mundo inteligible* (1770), que es el principio de lo que he dado en llamar la segunda etapa de las reflexiones de Kant sobre el espacio, Kant establece las bases de lo que con propiedad podríamos calificar como su teoría del espacio físico. Esto lo hace fundado en la idea del espacio como una *intuición pura* y a partir de sus dos principales doctrinas sobre el tema: la idealidad trascendental del espacio y la realidad empírica del espacio. Esta disertación de 1770 se hace famosa porque, entre otras razones, fue la que presentó Kant para ingresar como profesor a la Universidad de Koninsberg, la universidad de toda su vida. Muchos especialistas en Kant consideran que este escrito marca el nacimiento de su filosofía crítica o filosofía trascendental, en tanto que otros consideran que así no es. Aunque no voy a entrar a discutir sobre esta cuestión particular, la dejo para los especialistas en Kant, a continuación intentaré mostrar que en la *Disertación*, escrita 11 años antes de la *Crítica de la razón pura*, ya está configurada su teoría del espacio, allí sienta los principios básicos de su teoría, que será completada en la *Crítica*.

La doctrina de la *idealidad trascendental del espacio* aparece en la *Disertación* en los siguientes términos:

> *El espacio no es cosa alguna objetiva* y real, ni sustancia ni accidente ni relación, sino algo *subjetivo* ideal, que proviene de la naturaleza de la mente de acuerdo con una ley estable, a la manera de un esquema que coordina entre sí absolutamente todo lo que es objeto de sensación externa. Quines defienden la realidad del espacio, o bien se lo representan como un *receptáculo absoluto* e inmenso de las cosas posibles, opinión que después de los ingleses agrada a los más de los geómetras, o bien aseveran que es la relación *misma* de las cosas existentes, la cual se desvanece enteramente si se suprimen las cosas y sólo por las cosas reales es pensado, como después de Leibniz lo declara la mayor parte de los nuestros… los segundos contradicen abiertamente los fenómenos mismos y el intérprete más fiel de todos los fenómenos, la geometría. Porque, sin traer a colación el patente círculo en que necesariamente se embrollan al definir el espacio, derribada la geometría de la cumbre de su certeza, la arrojan a la lista de aquellas ciencias cuyos principios son empíricos… a los axiomas geométricos no les será inherente sino una universalidad comparativa, la cual se adquiere por inducción, o sea la que se extiende hasta lo que es observado: sólo una necesidad conforme a las leyes establecidas de la naturaleza, ni más precisión que la arbitrariamente fijada, y habrá la esperanza, como ocurre en el dominio de lo empírico, de descubrir algún día un espacio dotado de propiedades primitivas diferentes, o acaso una figura rectilínea de dos líneas[21].

Kant comienza por dejar claro que no está de acuerdo ni con Newton ni con Leibniz, en lo que respecta a la manera de concebir el espacio, para él el espacio no es una entidad real ni una construcción conceptual, sino algo propio de la mente humana, una manera muy particular de su funcionamiento: "un esquema que coordina entre sí absolutamente todo lo que es objeto de sensación externa". El espacio sería, entonces, un esquema mental que estructura y ordena todas nuestras sensaciones provenientes del mundo exterior.

[21] Kant [1770], Parágrafo 15, D. Esta doctrina también se presenta en Kant [1781-1787], p. 73, A28/B44; y las objeciones aparecen en Kant [1781-1787], A39-40/B56-57. Hay que tener presente que esta manera de concebir el espacio no coincide con la que aparece en la *Crítica*. Como dice Torretti, "en la *Crítica* desaparece del todo esta característica del espacio y el tiempo como leyes de la actividad coordinadora de la mente, o como esquemas o patrones en que la operación de tales leyes se manifiesta… Según esta concepción [la desarrollada en la *Crítica*], todo enlace de la multiplicidad sensible procede de la espontaneidad intelectual que se manifiesta en la actividad sintética de la imaginación regulada por los conceptos puros del entendimiento" (Torretti [1967], p. 198). Lo del paréntesis es mío.

Inmediatamente después, Kant arremete contra la idea leibniziana de espacio argumentando que si el espacio se entendiera como la mera posibilidad de la relación de coexistencia de las cosas, deberíamos admitir entonces que dicha noción relacional se obtiene a partir de la experiencia, con lo cual hemos de aceptar además que los axiomas de la geometría, la ciencia del espacio físico, se obtienen por simple inducción a partir de la observación y la experiencia. Y aceptar esto último es admitir que la universalidad de los axiomas de la geometría es sólo empírica, contingente (es una "universalidad comparativa", como dice Kant), y por tanto no necesaria; lo cual es inadmisible para él. Para Kant es impensable que la noción de espacio sea contingente, que los axiomas de la geometría no tengan certeza absoluta, puesto que, si así fuese, estos podrían modificarse en el transcurso del tiempo, cambiando así la geometría y podríamos entonces aceptar en un futuro que por dos puntos no pasa una recta.

En otros términos, la idea de que los axiomas de la geometría tienen una certeza apodíctica, esto es, que en ningún caso y bajo ninguna circunstancia real y pensable pueden ser falsos o, en otras palabras, que son universales y necesarios, ésta idea digo, es un punto de partida fundamental en la elaboración de la propuesta epistemológica que Kant está adelantando. Y esto se deje ver mucho mejor cuando decimos que lo anterior equivale a decir que los axiomas de la geometría son **juicios sintéticos *a priori***. Pero esta afirmación cobra un sentido más amplio en Kant, puesto que para él tal condición no sólo la tiene la geometría sino cualquier otra ciencia, en particular las otras dos ciencias conocidas en el momento: la matemática y la física.

Es claro que la historia, el desarrollo de la ciencia, no le da la razón a Kant. Esta es la tesis principal que busco sustentar en este escrito. La historia no le da la razón a Kant porque la geometría, como insinúa el título de este escrito, tiene algo que ver con la experiencia, la aparición de la relatividad general nos muestra que la geometría del espacio físico tiene relación con la experiencia, no tiene una certeza apodíctica. Aunque la pregunta que queda es: ¿cómo es la relación entre una teoría del espacio físico (como, por ejemplo, la teoría general de la relatividad) y nuestras observaciones y experiencias que tenemos del mundo físico?

La doctrina de la idealidad trascendental del espacio se complementa con la doctrina de la *realidad empírica del espacio*, de acuerdo con la cual: "aunque el *concepto de espacio*, considerado como el de un ente o el de un modo objetivo y real, es imaginario, *respecto*, sin embargo, *a todo lo sensible* es no sólo plenamente verdadero sino también el fundamento de toda verdad en la sensibilidad externa”[22] . En la primera doctrina se concluyó que el espacio es pura idealidad, pura subjetividad, esto es, una característica muy particular de la forma como trabaja nuestra alma; así que ni es una entidad real ni una entidad conceptual. Pero entonces, ¿por qué decimos que éste espacio subjetivo es el mismo espacio de la geometría, el mismo espacio de los objetos físicos? La segunda doctrina responde a esa pregunta: todas nuestras sensaciones externas son ordenadas espacialmente por nuestra mente y en este sentido todas ellas están condicionadas por el concepto de espacio. Esto equivale a decir que el espacio es una condición de posibilidad de toda experiencia externa.

Aunque el espacio como tal no es una entidad real en sí, es decir, no es un objeto del mundo totalmente independiente de nosotros como seres epistémicos; y como también es sabido que desde Kant, los llamados objetos tampoco son completamente independientes de nosotros (como seres epistémicos), puesto que la ordenación de nuestras sensaciones en objetos es otra operación de nuestra mente, entonces no hay nada extraño al decir que nuestras experiencias son espaciales o que los objetos se encuentran en el espacio. En este preciso sentido, el espacio es una realidad empírica, del mismo modo que decimos que los objetos de la experiencia son realidades empíricas. Por tanto, nunca podremos percibir los objetos fuera del espacio porque nuestra estructura mental trabaja de tal forma que ordena todas nuestras experiencias espacialmente. Nuestra estructura mental es tal que siempre tenemos que concebir los objetos dentro del espacio. Este hecho, de que los objetos estén siempre en el espacio, es lo que Kant llama *doctrina de la realidad empírica del espacio*.

5. *Crítica de la razón pura* (1781, 1787): teoría kantiana del espacio y filosofía de la geometría

Una pequeña reflexión para comenzar. Si partimos por afirmar que la geometría es una *teoría del espacio físico*, ¿qué se quiere decir con *teoría kantiana del espacio* y qué con *filosofía de la geometría*? Desde luego que no es que Kant haya elaborado una geometría, una teoría sobre el espacio físico, pues, como hemos dicho y veremos inmediatamente, para él la geometría (la geometría euclídea) está fuera de toda duda. Más bien, se afirma que Kant elaboró una teoría filosófica o

[22] *Ibíd*., Parágrafo 15, E. Esta doctrina también se presenta en Kant [1781-1787], A28/B44.

epistemológica sobre el espacio en general, que de un modo u otro ha de contener o estar relacionada con la noción particular de espacio físico de la geometría. Por otra parte, no hay duda de que Kant al afirmar, desarrollar y sustentar en su magna obra que lo característico del saber científico es poseer juicios sintéticos *a priori*, está haciendo filosofía de la ciencia y que, en particular, hace filosofía de la geometría al reflexionar sobre la estructura conceptual de la geometría y los fundamentos epistémicos de su concepto principal de espacio. Esto último explica la relación de principio que debe haber entre su teoría del espacio y su filosofía de la geometría, o, en forma afirmativa, Kant da razón de que los axiomas de la geometría son juicios sintéticos *a priori*, desarrollando y justificando todo un sistema epistemológico que contiene, entre otras cosas, el concepto de espacio. En pocas palabras, mientras su teoría del espacio responde a qué es el espacio, en sentido general, su filosofía de la geometría busca determinar los fundamentos epistemológicos de la geometría euclídea. Así que si bien ambas tareas son diferentes, hay puntos en las que ambas se refuerzan mutuamente, como veremos.

A continuación presento el esquema general del proceder kantiano a la hora de presentar su teoría del espacio y lo fundamental de su filosofía de la geometría en la *Crítica*.

a) Tal y como quedó sentado más arriba, parte por admitir la verdad de la geometría: los axiomas de la geometría son juicios sintéticos *a priori*.
b) Por lo anterior, la cuestión no es justificar la geometría sino mostrar cómo es posible esta geometría científica o, en términos generales, qué características comparten ciencias como la geometría, la matemática y la física para, precisamente, ser ciencias[23] .
c) Puesto que la geometría trata del espacio, entonces responder a la pregunta anterior pasa por responder a qué es el espacio; o, en otras palabras, mostrar cómo están estrechamente vinculadas su teoría del espacio y su filosofía de la geometría. El vínculo radica en estas dos propiedades del espacio: su idealidad trascendental y su realidad empírica. Lo primero permite hablar de una especie de geometría

[23] En estos particulares términos, el esquema de la *Crítica de la razón pura* es como sigue: la pregunta central es bien conocida, cómo es posible la metafísica como ciencia, pero para responder a ella, hay que saber primero qué caracteriza a un saber como científico. La respuesta a esto último es: poseer juicios sintéticos *a priori*; de modo que la nueva pregunta que surge es cómo son posibles estos juicios, a lo cual se dedicará buena parte de la *Crítica*.

pura y lo segundo de una especie de geometría aplicada[24] o, lo que es lo mismo, de la aplicación de la geometría pura a la experiencia.

d) Construcción de la geometría pura.

e) Enunciación del *Principio de los axiomas de la intuición*, que aclara la aplicación de la geometría pura a los objetos de la experiencia. En otras palabras, aquí se demuestra que la geometría euclídea abstracta es válida para los objetos de la experiencia o, a la inversa, que el espacio de la experiencia es euclídeo. En síntesis, en este punto se muestra que los axiomas de la geometría son juicios sintéticos *a priori* y que el espacio físico es un espacio euclidiano. Estas dos ideas se convierten en la columna vertebral que articula las distintas ideas que se exponen en el presente apartado.

Sobre a). Nuevamente, Kant no pone en duda la geometría, en la *Crítica* no va a reconstruir la geometría, ni va a hacer modificación alguna a esta rama del saber, simplemente está seguro de que la geometría es correcta, y tomo esta situación como un hecho establecido. El argumento que ha presentado contra Leibniz, tal y como lo vimos más arriba, lo considera contundente. Con sus propias palabras, "tenemos, pues, por lo menos, algunos indiscutibles conocimientos sintéticos *a priori*, y no debemos preguntar si son posibles (puesto que son reales), sino solamente cómo son posibles, para poder deducir también del principio de la posibilidad de los conocimientos dados la posibilidad de todos los demás"[25] . Así que Kant no tratará de remendar la geometría o cosas por el estilo. En este sentido, Kant no intentará justificar los axiomas de la geometría en algo más evidente o más fundamental, para él es evidente que son universalmente necesarios; este es su punto de partida y no el de llegada. Más bien su tarea consistirá en mostrar qué es lo que hace a esta geometría ser científica. Su gran pregunta en la *Crítica* es cómo es posible la metafísica como ciencia, pero antes tiene que demostrar, de manera particular, cómo son posibles la matemática y la ciencia de la naturaleza, la física.

Para Kant, admitir la verdad de la geometría es aceptar que sus axiomas son juicios sintéticos *a priori*. ¿Qué quiere decir esto? Los axiomas de la geometría son juicios sintéticos ya que, en sentido negativo, no pueden ser analíticos puesto que estos no se derivan de las definiciones de los conceptos que en ellos aparecen. En sentido positivo, los axiomas

[24] Las expresiones *geometría pura* y *geometría aplicada* no son de Kant, las retomo de Mittelstaedt [1966], pp. 45 y 46, porque considero que permiten presentar con mayor claridad los planteamientos de Kant.

[25] Kant [1783], §4.

de la geometría relacionan dos o más conceptos geométricos proporcionando información nueva que va más allá de la contenida en dichos conceptos. El enunciado *por dos puntos pasa una y sólo una recta* contiene los conceptos de punto y recta, y enuncia una relación que no está contenida en ninguno de los dos conceptos tomados por separado. Y precisamente por esto el enunciado es sintético. Pero además de esta propiedad, los axiomas de la geometría son *a priori* porque no son válidos en virtud de una posible experiencia sino que son pensados de inmediato por su necesidad, tienen una validez apodíctica. Así, el enunciado particular anterior es un axioma de la geometría porque es imposible que por dos puntos no pase ninguna recta o pase más de una. Pero, ¿cuál es el origen de esta necesidad? A continuación intento mostrar que esta necesidad se origina en el hecho de que el espacio es una intuición pura.

Sobre b). ¿Cómo es posible esta geometría científica? En lo que se conoce como argumento trascendental, Kant parte de asumir que los axiomas de la geometría son sintéticos *a priori* para después mostrar que el espacio es una intuición pura. En este argumento se observa claramente además cómo Kant fusiona temáticamente geometría y espacio. La cuestión la plantea y resuelve Kant en estos términos: "la geometría es una ciencia que establece las propiedades del espacio sintéticamente y, no obstante, *a priori*. ¿Cuál ha de ser la representación del espacio para que sea posible semejante conocimiento del mismo? Tiene que ser originalmente una intuición, ya que de un simple concepto no pueden extraerse proposiciones que vayan más allá del concepto, cosa que, sin embargo, ocurre en la geometría"[26] . Nuevamente, el espacio es un ente muy particular, no depende de los objetos espaciales, pues no es propiedad ni relación, pero tampoco cabe llamarlo objeto. Como plantea N. K. Smith: "El espacio no representa ninguna propiedad de las cosas en sí, ni las representa en su relación recíproca. Es decir, el espacio no representa ninguna determinación que vincule a los objetos mismos y que se mantenga, aun haciendo abstracción de todas las condiciones subjetivas de la intuición"[27] . En realidad, el espacio es la forma externa de los fenómenos, es una intuición pura. En otras palabras, el espacio pertenece a las condiciones trascendentales de posibilidad de la experiencia y, por tanto, nunca puede darse una alteración del concepto de espacio a partir de la experiencia. Esta tesis está basada en un análisis

[26] Kant [1781, 1786], B41.
[27] Smith [1950], p. 71.

preciso del proceso del conocimiento y la justificación de la misma corresponde a los elementos básicos de la epistemología kantiana, cuyas líneas generales son bien conocidas y paso a exponer a continuación.

Kant comienza por plantear que tenemos *sensaciones* y *pensamientos*, pero, como veremos, el objeto de las sensaciones no es idéntico al objeto de los pensamientos. Empecemos entonces por las sensaciones. Es claro que de alguna manera somos afectados por el mundo exterior y en este proceso podemos destacar, de manera particular, dos partes importantes: el sujeto que conoce y la realidad que resulta de este proceso. Kant, haciendo énfasis en la primera parte de las dos, llama *sensaciones* el tomar conciencia del resultado de esta afección en cuanto se refiere únicamente al sujeto que la padece; pero, haciendo énfasis en la segunda parte, se llama *intuición empírica* en cuanto esta afección se refiere únicamente al objeto mismo, resultado de dicha afección.

De acuerdo con Kant, no percibimos las cosas en sí, tal cual son, independientemente de nosotros como sujetos epistémicos. Las cosas tal y como las percibimos son resultado de un complejo proceso en el que nosotros intervenimos activamente como sujetos epistémicos. Esta es una de las principales tesis de la epistemología kantiana: el objeto inmediato de la *percepción* tiene sus raíces en parte en las cosas externas y en parte en el aparato de nuestra propia percepción. De ahí que Kant proponga llamar *fenómeno* al objeto de una intuición empírica, es decir, no percibimos las cosas tal como son, sino simplemente fenómenos. Ahora bien, si el objeto de una intuición empírica se llama fenómeno, entonces aquello que en el fenómeno corresponde a la sensación se llama la *materia* del fenómeno, la cual se distingue de la *forma* o *intuición pura* del fenómeno que es universal e invariable.

En otras palabras, la materia es lo constitutivo de la sensación y la forma es lo que aporta el individuo dentro de la experiencia misma. Hablar de *forma* equivale a hablar de *intuición*; la forma del fenómeno se caracteriza como aquello que "hace que lo múltiple del fenómeno pueda ser ordenado en ciertas relaciones", esto es, es lo que pone orden en la multitud amorfa de nuestras sensaciones. Nosotros somos afectados de múltiples maneras y en forma desorganizada, y nuestro sistema mental opera de tal manera que organiza toda esta diversidad.

Así, a este mecanismo organizador se le llama *intuición pura* y queda caracterizado en la *forma* de los fenómenos. Kant considera que solo hay dos formas o intuiciones puras de los fenómenos: *espacio*, la forma de los fenómenos del sentido externo, y *tiempo*, la forma de los fenómenos del sentido interno. Ambas formas de la intuición deben estar dispuestas *a priori* en el espíritu (en la mente), de modo que todos los fenómenos que se nos presentan a nosotros son siempre, de hecho, fenómenos en el espacio y en el tiempo. Esto implica que la forma de los fenómenos, desde el momento en que es una de las condiciones previas bajo las cuales es posible el fenómeno, no puede ser considera ella al mismo tiempo como fenómeno. En otras palabras, que el espacio sea una intuición pura, significa que si bien todos los fenómenos son espaciales, esta especialidad no está en las cosas como tal, sino que es puesta por nosotros; la espacialidad es resultado de la manera como nosotros organizamos nuestras múltiples sensaciones, siempre las organizamos de manera espacial. En pocas palabras, el espacio es una forma de intuición que actúa en el proceso del conocimiento como instrumento organizador ideal del contenido de las sensaciones. Algo semejante sucede con el tiempo. Por tanto, espacio y tiempo no son conceptos empíricos que puedan ser adquiridos mediante abstracción a partir de las observaciones y experiencias, porque, precisamente, lo que sucede es lo contrario, nuestras experiencias son posibles a través de las representaciones de espacio y tiempo. Hay que considerar, pues, al espacio y al tiempo como condiciones de posibilidad de los fenómenos.

Sobre c). Idealidad trascendental y realidad empírica del espacio. Como ya fueron explicados ambos dogmas, aquí solo voy a exponer lo que cada uno de ellos plantea y algunas cuestiones puntuales derivadas de estos. La *idealidad trascendental* del espacio radica en que el espacio por sí sólo no es un objeto, sino solamente una de las condiciones que hace posible la experiencia de los objetos. Y la *realidad empírica* del espacio consiste en el hecho de que todos los objetos que encontramos en la experiencia están en el espacio, ya que precisamente el espacio no es otra cosa que la forma de todas las apariciones externas de objetos de la experiencia. En síntesis, dice Kant, "afirmamos, pues, la realidad empírica del espacio (con respecto a toda experiencia externa posible), pero sostenemos, a la vez, la idealidad trascendental del mismo, es decir, afirmamos que no existe si prescindimos de la condición de posibilidad de toda experiencia y lo consideramos como algo subyacente a las cosas en sí mismas"[28] .

La interpretación del espacio como una condición de posibilidad de los fenómenos pone de manifiesto estas dos propiedades del concepto, que en un principio parecen excluirse, tal y como vimos al analizar esta tesis kantiana y los dos dogmas que la soportan en la Disertación del 70. Así que para mí y con base en la reflexión que antecede, al pensar Kant

[28] Kant [1781, 1786], B44/A28.

el espacio como intuición pura, está planteando, por un lado, la teoría trascendental del espacio y, por otro, la realidad física del espacio, con lo cual hace converger el problema de la geometría pura con el problema del espacio físico real. En el espacio como intuición pura se refuerzan las dos cuestiones.

Sobre d). Construcción de la geometría pura. ¿Cómo se construyen los conceptos de la geometría y cómo se establecen sus axiomas y teoremas? Los conceptos geométricos se obtienen por construcción en la intuición pura y "*construir* un concepto significa presentar la intuición *a priori* que le corresponde"[29]. Esto es así porque los conceptos geométricos se refieren a figuras en el espacio de la intuición, mediante las cuales se representan dichos conceptos en la intuición pura. Por tanto, el modo como se construye un concepto en la intuición pura corresponde, en cierto modo, a su definición. Así, por ejemplo, el concepto de triángulo lo elaboro en el momento en que, con el uso de la imaginación, me represento dicho triángulo en la intuición pura, o, lo que es equivalente, al trazarlo en un papel mediante la intuición pura; lo mismo sucede con el concepto de círculo, pues elaboro dicho concepto en el momento en que construyo el círculo ya sea en la intuición pura, con ayuda de la imaginación, o en el papel con la ayuda de la intuición pura. Esto es así porque los conceptos geométricos se refieren a figuras en el espacio de la intuición pura, por tanto el modo como se construye un concepto de la intuición pura corresponde en cierto modo a su definición. En otras palabras, dar la definición de un concepto es decir cómo se construye en la intuición pura, lo cual es equivalente a mostrarlo en la experiencia.

Ahora bien, ¿en qué sentido pueden considerarse los axiomas de la geometría como evidentes por sí mismos, como inmediatamente ciertos? Los axiomas se extraen de forma inmediata de la intuición pura y son ciertos también de forma inmediata, en esto último radica su validez apodíctica. El que sea de forma inmediata se debe a que son principios intuitivos y no son discursivos (del entendimiento). Esto es, la verdad de los axiomas no está mediada por otros conceptos, como es el caso en los discursivos. Así, por ejemplo, de las reglas de construcción de un triángulo se debe poder comprender de forma inmediata la proposición sobre la suma de sus ángulos: yo me represento en la intuición o trazo en el papel un triángulo e inmediatamente intuyo que la suma de sus ángulos interiores debe ser 180 grados. En esto consiste la evidencia de la proposición, la cual es captada a través de la intuición pura. Por tanto, la verdad evidente de los axiomas resulta inmediatamente de las reglas de

[29] *Ibíd.*, B741.

construcción de los conceptos que estos contienen. El razonamiento anterior igualmente sirve para justificar por qué los axiomas de la geometría son sintéticos *a priori*.

El resto de las proposiciones geométricas, los teoremas, se obtienen por derivación lógica a partir de los axiomas. Pero aún así son juicios sintéticos *a priori* dado que si bien, por lo anterior, aparecen como analíticos, lo cierto es que su comprensión última depende de la de los axiomas, que es sintética. Así que debido a que los teoremas se derivan de proposiciones sintéticas ellos retoman esa condición de sintéticos y son ellos juicios sintéticos a priori.

Sobre e). Aplicación de la geometría pura a los objetos de la experiencia. Kant en “El principio de los axiomas de la intuición” da el paso que conduce de lo que hemos llamado geometría pura a la aplicación de la geometría euclídea a los objetos de la experiencia, esto es, justifica el hecho de que la geometría euclídea abstracta sea válida para los objetos de la experiencia. Veamos como procede.

Es cierto que la enunciación del principio de los axiomas de la intuición es un tanto extraña en relación con lo que busca. En la primera edición aparece así: “todos los fenómenos son, en virtud de su intuición, magnitudes extensivas”[30] ; y en la segunda, de este otro modo: “todas las intuiciones son magnitudes extensivas”[31] . Pero dejemos estos detalles técnicos de lado y veamos lo que dice Kant en el momento de aclarar lo que significa este principio, que es lo que particularmente nos interesa por ahora:

> Este principio trascendental de las matemáticas de los fenómenos amplía notablemente nuestro conocimiento a priori. En efecto, sólo él permite aplicar la matemática pura, con toda su precisión, a los objetos de la experiencia, lo cual no resultaría claro por sí mismo si prescindiéramos de él. Es más, ello ha provocado numerosas contradicciones. Los fenómenos no son cosas en sí mismas. La intuición empírica sólo es posible mediante la intuición pura (del espacio y del tiempo). Consiguientemente, lo que la geometría afirma de esta última vale también incuestionablemente para la primera[32].

En el punto inmediatamente anterior se dejó sentado que los axiomas de la geometría pura son juiciosos sintéticos *a priori*, lo que se busca ahora es trasladar la verdad apodíctica de esa geometría pura al espacio real, al espacio físico. Y esto lo permite, precisamente, el postulado

[30] *Ibíd.*, A163.
[31] *Ibíd.*, B203.
[32] *Ibíd.*, A166/B207.

anterior. En otras palabras, el principio justifica que la geometría euclídea abstracta sea válida para los objetos de la experiencia, bajo el razonamiento siguiente: se ha mostrado, por una parte, que los fenómenos los encontramos en el espacio (“la intuición empírica sólo es posible mediante la intuición pura”) y, por otra, que los axiomas de la geometría euclídea pura (en cuanto estos tienen que ver con la intuición pura) son verdades apodícticas, de ahí que los axiomas de la geometría aplicada, en cuanto se aplican a las intuiciones empíricas, sean también verdades apodícticas. En pocas palabras, lo que dice la geometría euclídea para el caso de la intuición pura vale también para la intuición empírica porque todos los fenómenos están determinados por la intuición pura. Así pues, aunque en principio los axiomas de la geometría no tienen nada que ver con la experiencia, ni en cuanto a su objeto ni en cuanto a su fundamento, son absolutamente aplicables con todo rigor a los objetos de la experiencia.

Llegados a este punto hay que hacer la salvedad de que la geometría puede ser válida en la experiencia sólo en un caso límite ideal, pues es cierto que no encontramos figuras geométricas en el mundo real sino aproximaciones u objetos que se aproximan a las figuras geométricas. Pero esta situación límite no invalida la aplicación de la geometría a la experiencia en toda su extensión y con todo su rigor. Veamos lo que dice el propio Kant al respecto:

> Hay que eliminar los pretextos según los cuales los objetos de los sentidos no pueden conformarse a las reglas de construcción en el espacio… Lo que la matemática demuestra, en su uso puro, respecto aquella síntesis es también necesariamente válido respecto de dicha experiencia externa. Todas las objeciones a esto no son más que trabas de una razón mal formada que pretende, equivocadamente, desligar los objetos sensibles de las condiciones formales de nuestra sensibilidad y que representa dichos objetos como objetos en sí mismos que se dan al entendimiento, cuando no son más que fenómenos[33].

Con esto llegamos a configurar la propuesta kantiana, que básicamente consiste en afirmar que la geometría euclídea es válida tanto en su forma pura como en su forma aplicada; lo que en últimas equivale a decir que el espacio físico real que experimentamos es un espacio euclídeo, un espacio con una métrica euclídea cuyos axiomas son juicios sintéticos *a priori*.

[33] *Ibíd.*, A166/B207.

6. Las geometrías no euclidianas: geometrías pura y física[34]

En lo que sigue intentaré mostrar que Kant no tenía razón al afirmar que los axiomas de la geometría son juicios sintéticos *a priori*, lo cual constituye un punto fundamental de partida en la elaboración de su propuesta epistemológica y, en particular, en su reflexión filosófica sobre el espacio y la geometría euclídea. La tesis falla en dos direcciones, las dos direcciones en las que transcurre su reflexión filosófica: una, en la dirección que tiene que ver con la geometría pura, al afirmar que los axiomas de la geometría tienen una validez apodíctica; y dos, en la dirección de la geometría aplicada, al implicar que el conocimiento de la estructura espacial del mundo se obtiene de forma *a priori*, independientemente de la observación y la experiencia[35] .

La primera parte de la tesis queda refutada por la aparición de las geometrías no euclídeas. En este punto la siguiente reflexión de Poincaré es bastante significativa: "cuál es la naturaleza de los axiomas geométricos. ¿Son juicios sintéticos *a priori*, como decía Kant? Entonces se nos impondrían con tal fuerza que no podríamos concebir la proposición contraria, ni construir sobre ella un edificio teórico. No habría geometría no euclideana"[36] . Ahora bien, como efectivamente contamos con geometrías alternas a la de Euclides, tenemos que concluir que los axiomas de estas distintas geometrías no son sintéticos *a priori*.

En cuanto a la segunda parte de la tesis, queda en vilo con la aparición de las geometrías no euclídeas y finalmente se va al traste con la teoría general de la relatividad de Einstein, en la que se demuestra a partir de consideraciones físicas y matemáticas que el espacio físico es semiesférico, no euclídeo. Dado que Einstein llega a esta conclusión teniendo en consideración determinadas observaciones y experiencias físicas, así como también ciertos experimentos, debemos concluir que el conocimiento del espacio físico no se obtiene de manera *a priori*, dejando de lado toda consideración empírica.

A continuación enuncio las principales implicaciones de la aparición de las geometrías no euclidianas.

a) Permitió una mejor comprensión de la naturaleza hipotética de la geometría axiomática pura y, por tanto, de las matemáticas en general.

[34] Las ideas de este apartado las he desarrollado más extensamente en el artículo Guerrero [2005].

[35] Como dice Reichenbach, "Kant no quiere decir simplemente que las leyes generales a priori sean correctas –esto sería trivial-, sino que el conocimiento empírico no puede prescindir de ellas" (Reichenbach [1921], p. 38).

[36] Poincaré [1902], p. 61.

b) Produjo el esclarecimiento del concepto de espacio físico en oposición al concepto de espacio matemático. Esto es, proporcionó la separación entre geometría pura y geometría física.
c) Puso en claro que no había ningún medio *a priori* para decidir, lógica o matemáticamente, sobre el tipo de geometría que representa en realidad las relaciones espaciales entre los cuerpos físicos. Esto precisamente porque la geometría euclídea y las no euclidianas están en igualdad de condiciones desde un punto de vista lógico, las últimas son tan consistentes como la primera.

Pasemos entonces a la exposición de las principales peculiaridades relacionadas con las geometrías no euclídeas. Como ya se advirtió, la aparición de este tipo de geometrías tiene que ver con la historia del problema del quinto postulado de la geometría de Euclides, el así llamado postulado de las paralelas, y también con el origen de la distinción entre geometría pura y geometría física. El debate sobre el estatus del postulado de las paralelas transcurrió por tres vías: "intentos de derivar el postulado de las paralelas del resto de la geometría elemental, intentos de volver a formular el postulado o la definición de las paralelas convirtiéndolo en algo que no pudiera ser objeto de tantas objeciones y descripciones de lo que podría abarcar la geometría si se negara, de alguna manera, el postulado"[37] .

De acuerdo con la primera vía, el problema con el postulado no radicaba en su verdad sino en su independencia respecto al resto de postulados; es decir, para muchos matemáticos este postulado en realidad no era tal, sino un teorema que podía demostrarse a partir de los otros cuatro. Se hicieron muchos esfuerzos infructuosos para llevar esta tarea a feliz término, hasta que con la construcción de geometrías no-euclidianas quedó demostrada la independencia del quinto postulado; es decir, el hecho de que el quinto postulado no es derivable de los otros. Hemos de concluir que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro puesto que podemos construir un sistema de geometría, también con cinco postulados, en el que uno de sus postulados niega el postulado de las paralelas, mientras que los otros cuatro se mantienen igual, de tal modo que ninguno de los teoremas (los enunciados derivados de los postulados) contradice (lógicamente) a los postulados. Precisamente de esta manera es como se procede a construir geometrías no-euclídeas. Por tanto, cualquiera de los sistemas de geometría no-euclidiana tiene un postulado alternativo a -un postulado incompatible con- el quinto

[37] Gray [1992], p. 56.

postulado de Euclides que toma una de las formas de su negación. Como el quinto postulado asevera dos tipos de cosas: una, la existencia de paralelas y, dos, que la paralela es única; entonces es posible construir por esta vía sólo dos tipos de geometrías: las que afirman que no hay paralelas y las que afirman que hay más de una paralela. Todo esto, claro está, respecto a una recta dada y a un punto dado.

Veamos entonces las principales características de las geometrías no-euclidianas. La primera de estas posibilidades que se apartan de Euclides fue explorada independientemente y casi simultáneamente, a comienzos del siglo XIX por Karl Friedrich Gauss, János Bolyai y Nikolai Lobachevski, quienes desarrollaron la geometría no-euclidiana llamada geometría hiperbólica. Esta geometría mantiene los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea, pero rechaza el quinto, proponiendo como alternativa algo equivalente al siguiente enunciado: por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela. Nótese que si se omiten las palabras 'más de' se obtiene una expresión equivalente al postulado de las paralelas.

La segunda posibilidad fue propuesta, no mucho después de la primera, por el matemático alemán Georg Friedrich Riemann. El tipo de geometría no-euclídea que propuso se conoce como geometría esférica, de modo que rechaza tanto el quinto postulado como el segundo, y admite los otros tres de la geometría euclídea. Los dos postulados alternativos son respectivamente: por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela, y dos rectas cualesquiera tienen dos puntos distintos en común. Además, la geometría elíptica tiene como variante del segundo postulado de la geometría esférica el siguiente enunciado: dos rectas cualesquiera tienen un único punto en común.

Entre las propiedades que debe cumplir un sistema de geometría alterno a la euclidiana mencionamos el que sus teoremas no contradigan a sus propios postulados. Esto equivale a decir que el sistema tiene que ser consistente, que carezca de contradicciones internas. Ahora bien, ¿cómo determinar que un sistema de geometría es consistente o inconsistente? Un sistema es contradictorio o inconsistente cuando a partir de él se puede demostrar cualquier enunciado, y es consistente o no contradictorio en caso contrario, cuando de él no se deriva ninguna contradicción. Así, en un sistema contradictorio nos podemos encontrar con que algunos enunciados y sus respectivas negaciones son derivables. Esta es la forma sintáctica de definir la consistencia, pero está su equivalente semántica que es más efectiva: un sistema axiomático es consiste si tiene un modelo, una estructura matemática, en el cual los axiomas son verdaderos. Y esto último por la siguiente razón, en palabras de van Fraassen: "todos los axiomas de la teoría (adecuadamente interpretados) son verdaderos en el modelo, por lo que todos los teoremas son similarmente verdaderos en él; pero ninguna contradicción puede ser verdadera de algo; por lo tanto, ningún teorema es una contradicción"[38].

En definitiva, se dice que la consistencia de un sistema formal no es una propiedad absoluta sino relativa; esto es, la consistencia de un sistema es respecto a otro que se toma como referencia. De manera particular, la consistencia de las geometrías no euclídeas está supeditada a la consistencia de la geometría euclídea y esto porque para cada una de las geometrías no-euclídeas se puede elaborar una interpretación, construir un modelo, en la geometría euclídea. De modo que de haber alguna inconsistencia en alguna de ellas, esta debería aparecer en alguno de los modelos que satisface la geometría euclídea, pero tal cosa no se presenta. Por tanto, hemos de concluir que las geometrías no euclídeas son tan consistentes, exentas de contradicción, como la euclídea.

Una vez elaboradas las geometrías no euclídeas la pregunta obvia fue: ¿cuál es la geometría verdadera? o, en términos más directos, ¿cuál es la geometría del mundo físico? Este problema sobre la estructura geométrica de nuestro espacio físico no había surgido antes, puesto que cuando sólo se contaba con la geometría euclidiana, y no existiendo otra posibilidad, se suponía esta geometría como la aplicable a la realidad física. Pero ante la presencia de diversas geometrías la salida al problema comienza por distinguir entre una geometría pura (matemática) y una geometría aplicada (física). Así que desde el punto de vista lógico, las geometrías no euclidianas y la euclidiana están en igualdad de condiciones: podemos calificarlas a todas ellas de geometrías puras. Pero desde el punto de vista de la experiencia, en relación con la realidad, queda el interrogante: ¿cuál es la geometría verdadera?, ¿cuál es la geometría del mundo físico?, o, si se quiere ser menos pretencioso, ¿cuál de ellas describe la estructura espacial de la realidad?, o, aún más, ¿cuál de ellas se adecua mejor a la experiencia? Una vez llegados a este punto queda como tarea averiguar el tipo de estructura del espacio físico, saber si el espacio físico es euclidiano o no.

Resultó natural recurrir a la experimentación para tratar de indagar si esta cuestión se podría resolver *a posteriori*[39] . Así, por ejemplo, Gauss

[38] van Fraseen [1980], p. 43.
[39] El estado de la situación queda bastante bien descrito para las siguientes palabras de Sklar: "¿No es evidente, pues, que los empiristas tienen razón?... Es la observación, pues la que ha de decidir cómo es realmente la geometría del mundo. Cualquier esperan-

(1817), bajo su perspectiva empirista extrema trató de determinar directamente mediante triangulación ordinaria, realizada con instrumentos topográficos, si la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º o no. No falta decir que no encontró ninguna desviación interesante que permitiera demostrar o refutar su convicción por la validez de la geometría no euclidiana.

La propuesta de Helmholtz (1863) es bastante interesante porque representa una especie de reconciliación del apriorismo kantiano con el empirismo. Helmholtz es el primero en poner en evidencia la independencia existente entre la exposición metafísica y la exposición trascendental del concepto de espacio, en lo que no cayó en cuenta Kant. Más aún, para Helmholtz la exposición trascendental es incorrecta, en tanto que la exposición metafísica no lo es. Al objetar duramente el argumento trascendental, está cuestionando la suposición del carácter *a priori* que Kant da a la geometría euclídea. De acuerdo con él, es cierto, como plantea Kant, que tenemos una intuición pura del espacio, pero esa intuición pura no tiene porqué ser euclídea. La intuición pura puede tener la propiedad de continuidad, propia de la geometría euclídea como de las no euclídeas, pero no tiene porqué poseer una métrica. De este modo, el espacio como una forma pura de la intuición conduce a una sola conclusión: todos los objetos del mundo externo necesariamente tienen que estar dotados de extensión espacial pero sin embargo el carácter geométrico, el tipo de métrica, de esta extensión es únicamente cuestión de la experiencia. Si la extensión es euclídea (tiene una métrica euclídea) o no, eso lo define la experiencia. El tipo de geometría, de métrica, que tiene el espacio depende de la experiencia.

Considero que los planteamientos de Mittelstaedt van en una dirección muy semejante a la de Helmholtz, al plantear que el error de Kant se encuentra en la argumentación que presenta en el principio de los axiomas de la intuición, sobre la aplicación de la geometría a la experiencia, particularmente al afirmar que los axiomas de la geometría tienen una validez apodíctica tanto en el dominio de la intuición pura de espacio como en el de las intuiciones empíricas. Con las propias palabras de Mittelstaedt, "el que la geometría euclídea inicialmente edificada en la intuición espacio sea aplicable a la experiencia, se apoya en que las mismas construcciones geométricas que en la intuición se pueden realizar también en el espacio empírico"[40], pero a continuación anota:

za de conocer la geometría del mundo con certeza e independientemente de la observación y el experimento es falaz. Pero, ¿están las cosas tan predeterminadas?" (Sklar [1992], p. 88).

[40] Mittelstaedt [1966], p. 53.

> Este principio no garantiza solamente la validez de la geometría euclídea en la experiencia, asegura además la validez de la geometría en general. Lo que en detalle dicen las proposiciones de la geometría, no es esencial para la demostración de este principio y depende de los principios de construcción de los conceptos geométrico de que tratan las proposiciones. Es, pues, posible la experiencia antes que se haya realizado una geometría científica, que estructure esta experiencia de un modo especial: la geometría euclídea es entonces solamente una estructuración posible, pero no necesaria, de la experiencia pregeométrica[41].

En este punto yo sólo diría que Mittelstaedt estará de acuerdo con la idea de que para Kant es claro que la geometría es aplicable a la experiencia y que él no tiene duda en que esta geometría no es otra que la geometría euclidiana, independientemente de si logra presentar una argumentación consiste para sostener dicha idea.

7. Poincaré y Einstein: geometría y experiencia

H. Poincaré, a principios del siglo XX, intentó demostrar, de una vez por todas, la inutilidad de esta controversia y la falacia de cualquier intento por descubrir experimentalmente cuál de las geometrías mutuamente excluyentes es aplicable al espacio real. La conclusión a la que llegó fue que la experiencia no puede confirmar ni refutar una geometría cualquiera que ésta sea.

Al indagar por las peculiaridades propias de las construcciones científicas, Poincaré se encontró con que realmente no todas ellas pueden ser asumidas como hipótesis que tarde o temprano serán verificadas o refutadas por la observación y la experiencia, convirtiéndose así en verdades o falsedades fecundas de la ciencia; sino que algunas de éstas construcciones son en realidad definiciones o convenciones, que se presentan con aspecto de hipótesis. El hecho que las hace ser convenciones, y no hipótesis, es que la experiencia no tiene nada que ver con su verdad o falsedad:

> Esas convenciones –dice Poincaré- son la obra de la libre actividad de nuestra mente, que en ese dominio no reconoce obstáculo. En él, ella puede afirmar porque decreta; pero entendámonos: esos decretos se imponen a nuestra ciencia, que, sin ellos, sería imposible; no se imponen a la naturaleza. Sin embargo, ¿son arbitrarios esos decretos? No, porque serían estériles. La experiencia nos deja libre la elección, pero la guía ayudándonos a discernir el camino más cómodo[42].

[41] *Ibíd.*
[42] Poincaré [1902], p. 14.

Por este camino, Poincaré llega a concluir que el espacio no es un constructo hipotético de la ciencia sino una mera convención. Su argumento se basa más o menos en estas dos ideas: nunca medimos el espacio mismo directamente, sino que siempre medimos objetos físicos dados empíricamente en el espacio, ya sean estos varillas rígidas o rayos de luz; y los experimentos no pueden decidir nada sobre la estructura del espacio como tal, sólo suministran las relaciones que se mantienen entre los objetos. Veamos esto en detalle.

Poincaré nos propone imaginarnos el caso de una dilatación uniforme del universo, en el que todas sus dimensiones aumentan uniformemente durante la noche un millar de veces: lo que antes medía un metro, mide ahora un kilómetro. Esta dilación se encuentra más allá de cualquier verificación física, pues cualquiera que fuese el instrumento de medición que se empleara, este también habría crecido en la misma proporción. Lo que Poincaré quiere mostrar con este experimento de pensamiento es que todas nuestras experiencias pueden ser igualmente acomodadas por dos teorías alternativas como las siguientes: en una teoría el espacio físico es no euclídeo y los cuerpos son completamente rígidos, mientras que en la otra teoría el espacio físico resulta euclídeo y los cuerpos (y también los instrumentos de medición) se dilatan. Bajo estas circunstancias, no habría ninguna experiencia que permitiera elegir una teoría por encima de la otra. Es una cuestión, no de hecho, sino de convención el que una geometría, y no otra, describa el espacio del mundo. Tomemos otro ejemplo, el experimento de triangulación de Gauss. Si llegásemos a encontrarnos con una desviación significativa respecto a 180º, no necesariamente tendríamos que concluir que la geometría del espacio físico no es euclidiana, igualmente podríamos aferrarnos a una geometría euclidiana y aceptar la idea de que los rayos de luz no viajan en línea recta.

Por tanto, concluye Poincaré, la geometría euclídea no puede ser refutada por ningún tipo de experimento. No hay nada en los hechos implicados que determine cuál es la geometría correcta. La pregunta ¿es la geometría euclídea verdadera? No tiene sentido. Por tanto, nos corresponde a nosotros decidir qué descripción dar al mundo. La verdadera geometría del mundo es una cuestión de decisión o convención por nuestra parte, y por consideraciones de simplicidad y conveniencia siempre consideraremos que la geometría del mundo es euclídea. Esto es, en lo que a él respecta, la geometría más conveniente para representar el espacio físico es la euclidiana puesto que es mucho más simple que las otras, es la que la intuición y, de algún modo, la experiencia misma nos proporcionan en un primer momento o, si se quiere, la que obtenemos de la abstracción familiar de la experiencia común con los cuerpos sólidos y los rayos de luz.

La propuesta de Poincaré tiene implicaciones epistemológicas de largo alcance al plantear que no podemos llegar a un conocimiento ni siquiera aproximado de la estructura del mundo, ni a partir de la observación directa y los experimentos, y mucho menos apartados de ellos. Pero aquí sólo podemos mencionar estas implicaciones, sin profundizar en ellas.

Esta es la situación con que se va encontrar Einstein. A continuación describo, en términos muy amplios, su idea central sobre la estructura del espacio físico a la luz de su teoría general de la relatividad, que no es del todo difícil, es relativamente sencilla, pero voy a proceder paso a paso. La posición de Einstein en este tema es bien clara: "la pregunta acerca de si la geometría práctica del universo [la estructura espacial del mundo físico] es o no euclidiana tiene un sentido claro y la respuesta sólo puede proporcionárnosla la experiencia"[43] o, si se quiere, "el problema de si el continuo tiene una estructura euclídea, riemanniana u otra de naturaleza distinta, es una cuestión estricta de la física, que ha de ser contestada por la experiencia y no una cuestión de convención elegida sobre la base de la mera conveniencia"[44] . Pero esto no quiere decir que esté defendiendo un empirismo extremo del tipo de Gauss, puesto que la respuesta que nos pueda proporcionar la experiencia sobre la geometría del espacio físico no la obtenemos de manera directa, sin que medie reflexión o análisis alguno, sino que, por el contrario, la respuesta, como veremos, está supeditada a consideraciones teóricas, de principio. En otras palabras, no es posible resolver la cuestión de la estructura geométrica del mundo sin tener en cuenta ciertos resultados de la teoría general de la relatividad y sin enfrentar el reto convencionalista lanzado por Poincaré.

Un resultado importante de la teoría de la relatividad general es que "las propiedades geométricas del espacio no son independientes, sino que vienen condicionadas por la materia. Por eso no es posible inferir nada sobre la estructura geométrica del mundo a menos que la reflexión se funde en el conocimiento del estado de la materia"[45] . Y esto contrasta de un modo drástico con la mecánica clásica y la relatividad especial.

[43] Como lo señaló Einstein en su conferencia ante la Academia de Ciencias de Berlín, en 1921, publicada más tarde con el título *Geometría y experiencia*. Véase Einstein [1921], p. 43.

[44] *Ibíd.*, p. 46.

[45] Einstein [1917], p. 98.

En la mecánica clásica el espacio tiene una existencia independiente de la materia y del tiempo, y en la teoría de la relatividad especial, aunque espacio y tiempo son objetivamente indisolubles y forman un continuo tetradimensional, el continuo espacio-tiempo tiene una existencia independiente de la materia o el campo. Así que en la teoría de la relatividad general el espacio no tiene una existencia particular e independiente de aquello que llena el espacio. Esto es, si suprimimos mentalmente el campo gravitatorio, lo que queda no es un espacio vacío, del tipo de la mecánica clásica, ni un continuo espacio-tiempo, del tipo de la relatividad especial, sino que no queda absolutamente nada: "el espacio vacío, es decir un espacio sin campo, no existe"[46].

Ahora bien, ¿cómo poder hablar de la geometría del espacio físico, si espacio y materia (o campo) no son independientes en la teoría de la relatividad general? Para Einstein es posible hacerlo, tal y como observamos más arriba, pero siempre y cuando hagamos dos consideraciones sobre nuestra experiencia del mundo: por un lado, si elegimos un sistema de coordenadas conveniente, veremos que las velocidades de las estrellas son relativamente pequeñas respeto a la velocidad de propagación de la luz; y, por otro lado, a partir de lo anterior, podemos suponer que la materia del universo está en reposo[47].

Una vez aclarada la posibilidad de hablar significativamente del espacio físico del mundo, nos vemos enfrentados al reto de Poincaré. Einstein empezará por decir que Poincaré sólo tenía razón en parte, tal y como se concluye a partir de la teoría general de la relatividad, pues con él hay que admitir que la construcción conceptual de la noción de espacio en la física se basa en el hecho empírico de que hay dos clases de cambios en los cuerpos físicos: cambios de estado y cambios de posición. Por una parte, los objetos del mundo físico tienen modificaciones o cambios en lo que tiene que ver con su forma, con su estado, así por ejemplo, esta mesa podría dilatarse o contraerse; en tanto que el movimiento de la mesa sería un cambio de posición. Veamos ahora el ejemplo imaginario de Poincaré.

Lo que éste experimento propone es un cambio de estado en los cuerpos: si todos lo cuerpos del universo se dilatan de una noche a otra, no podríamos notar dicho cambio puesto que nuestras reglas, nuestros instrumentos de medida, se dilatarían igualmente en la misma proporción que los cuerpos a medir. Por tanto, Poincaré concluye que la geometría del mundo físico está indeterminada y que por cuestiones de simplicidad

[46] *Ibíd.*, p. 138.
[47] Véase Einstein [1917], p. 98.

y conveniencia debemos elegir la geometría euclídea como la más indicada para representar la estructura del espacio físico. Einstein conoce muy bien la argumentación de Poincaré, pues plantea que "si rechazamos la relación entre el cuerpo de la geometría euclídea axiomática y el cuerpo prácticamente rígido de la realidad, llegaremos de inmediato, como el agudo y profundo pensador Henry Poincaré, al siguiente enunciado: la geometría euclidiana se distingue por encima de toda otra geometría axiomática concebible gracias a su simplicidad"[48]. Así que, el hecho de que adoptemos una geometría es cuestión de convención, pero únicamente mientras no hagamos ninguna suposición concerniente al comportamiento de los cuerpos físicos implicados en las mediciones. Una vez establecidas estas suposiciones, el sistema geométrico queda determinado por la experiencia.

Por tanto, la salida al convencionalismo de Poincaré la encuentra Einstein en comenzar por reconocer que la relación entre las posibles localizaciones de los cuerpos rígidos (o casi-rígidos o prácticamente rígidos) del mundo físico son equivalentes a las relaciones entre los cuerpos de la geometría euclídea. O, en términos más concretos, si admitimos el postulado fundamental que dice "si dos distancias han sido halladas iguales una vez y en alguna circunstancia, son iguales siempre y en todas las circunstancias", hay que concluir que la estructura geométrica del espacio está condicionada por la experiencia. Este principio es un principio elemental, pero es el principio sobre el que descansa "no sólo la geometría práctica de Euclides, sino también su más reciente generalización, la geometría práctica de Riemann, y la teoría general de la relatividad"[49]. Por tanto, no podemos admitir la experiencia imaginaria de Poincaré, realmente nuestros cuerpos tienen que ser relativamente rígidos dadas las condiciones porque de lo contrario no podríamos adelantar absolutamente nada en cuanto a las características del mundo físico, ni mucho menos en cuanto a la estructura de nuestro espacio.

Ahora bien, por las consideraciones propias de la teoría general de la relatividad se tiene que el comportamiento de las reglas de medir y relojes está influenciado por los campos de gravitación, esto es, por la distribución de la materia. Por tanto, "la validez exacta de la geometría euclidiana en nuestro mundo es algo que no entra ni siquiera en consideración"[50]. Einstein ilustra de manera más particular esta

[48] Einstein [1921], p. 43.
[49] *Ibíd.*, p. 45.
[50] Einstein [1917], p. 98.

conclusión: “en un sistema de referencia que posee un movimiento de rotación con respecto a un sistema inercial, las leyes de localización de los cuerpos rígidos no corresponden a las reglas de la geometría euclidiana, de acuerdo con la contracción de Lorentz. De modo que si admitimos los sistemas no inerciales en un pie de igualdad, debemos abandonar la geometría euclídea”[51] .

En pocas palabras, la argumentación de Einstein es como sigue. Es posible resolver a través de la experiencia qué tipo de geometría corresponde a la estructura del espacio, siempre y cuando se parta de la idea, fundamental dentro de la física, de que los cuerpos mantienen su misma extensión cuando son trasladados de un sitio a otro, esto es, se mantenga la congruencia de los estados de los cuerpos al ser trasladados. Partiendo de este principio, entonces, es posible reconstruir toda la experiencia física que tenemos, de tal manera que esto nos lleva a concluir que la geometría correspondiente es una geometría no euclídea, semiesférica, o, para ser más precisos, semirriemanniana.

Ahora bien, hay que tener claro que realmente lo que se está presuponiendo que debe adecuarse a la experiencia es el comportamiento de los estados de los cuerpos unido a los cambios de los cuerpos, lo cual constituye un sistema completo[52] . Así, este sistema completo es el que se contrasta con la experiencia, y propiamente no se está contrastando cada una de estas componentes por separado. No podemos llegar a la idea ingenua que lo que se está proponiendo es que el espacio es empírico, en el sentido en que se experimenta de manera directa. Lo que se puede decir es que la totalidad de las experiencias (encuadradas dentro de un sistema) de lo que es el estado de los cuerpos y los cambios de los cuerpos, acompañadas del principio de congruencia en la traslación lleva a Einstein a concluir que el espacio es no euclídeo. En ese sentido podemos afirmar que nuestro esquema conceptual nos lleva a privilegiar que los cuerpos no modifican su extensión al cambiar su posición, lo cual finalmente nos conduce a que, a la luz de la experiencia, efectivamente la geometría del espacio físico es no euclídea. Con las palabras de Max Jammer, “de esto resulta claro que la estructura del espacio de la física no es, en

---

[51] Einstein [1921], p. 43.

[52] En este punto pareciese que nos estuviéramos moviendo en un círculo vicioso: “los objetos cuyas posibles colocaciones pretende describir la geometría euclídea no se pueden especificar al margen del contenido de la física. Mas, dado que la física tiene que hacer uso de la geometría desde el momento en que establece sus conceptos, el contenido empírico de la geometría no puede ser especificado y contrastado sino en el marco de la física como un todo” (Einstein [1917], p. 126).

último análisis, algo dado en la naturaleza o independiente del pensamiento humano. Es una función de nuestro esquema conceptual"[53].

Pues bien, si contrastamos estas distintas conclusiones de Einstein con la concepción kantiana del espacio físico, no hay duda de que la teoría kantiana del espacio está equivocada al afirmar que el espacio físico es euclidiano, pero, lo que es más grave, también se equivoca al afirmar que podemos conocer la estructura física del mundo de manera *a priori*, por fuera de toda consideración empírica. La ciencia no se construye sobre juicios sintéticos *a priori*, la ciencia es falible, se construye lentamente y en forma gradual, vamos modificando por partes sus principios y presupuestos. La ciencia no es una cuestión de todo o nada.

Pero aún así, creo que de la propuesta epistemológica de Kant se puede rescatar la idea de que en el proceso del conocimiento, nosotros, los sujetos epistémicos, operamos mediante un esquema o una estructura muy particular que nos permite concebir el mundo de cierta forma. El error de Kant estaría en decir que este esquema es universal y absoluto. Así, considero que debemos retomar la primera lección de Kant y rechazar la segunda: realmente la historia de la humanidad muestra que tenemos formas muy particulares de abordar la naturaleza, empleamos determinados esquemas conceptuales que nos permiten ordenar la naturaleza de cierta forma, pero estos esquemas no son absolutos, se han ido modificando con el tiempo. En esto consistiría la recuperación que yo haría de Kant, de la importancia epistemológica que tiene su obra.

Quiero terminar con las siguientes palabras de Hanson, que se complementan con las palabras de Jammer mencionadas más arriba, en cuanto al camino un tanto paradójico de la presente reflexión, que en la determinación de la estructura geométrica del mundo físico, ha transcurrido entre los límites marcados por el apriorismo kantiano y el empirismo radical: "Pascal situó al hombre a mitad de camino entre los ángeles y las bestias. Es de esta posición, pensaba él, de la que surge la «situación humana». La ciencia, el glorioso logro del hombre moderno, se halla análogamente situada entre la matemática pura y la experiencia sensorial bruta: es de la tensión conceptual generada entre estas coordenadas polares de la que provienen las perplejidades *filosóficas* sobre la ciencia"[54].

[53] Jammer [1954], p. 218.
[54] Hanson [1971], p. 11.

Referencias Bibliográficas

Campos, A. [1994]: *Axiomática y geometría. Desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Bogotá, 1994.

Einstein, A. [1917]: *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*, Alianza Editorial, Madrid, 1999.

——— [1921]: "Geometría y experiencia", en A. Einstein, *Sobre la teoría de la relatividad y otras aportaciones científicas*, Sarpe, Madrid, 1983.

Enriques, F. [1924]: *Los elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*, Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, Madrid, 1954.

Euclides: *Elementos*, ver Enriques [1924].

Gray, J. [1992]: *Ideas de espacio*, Biblioteca Mondadori, Madrid.

Guerrero, G. [2001]: "Fallas en el enfoque sintáctico-axiomático de las teorías a la luz del enfoque semántico", en J.M. Sagüillo, J.L. Falguera y C. Martínez (eds.), *Proceedings of the Congress Formal Theories and Empirical Theories. Foundational, Ontosemantic and Pragmatic Aspect*, Universidad de Santiago de Compostela – España, pp. 595-610.

——— [2004]: "Individuación de las teorías en el enfoque semántico", en J. Poulain y W. González (ed.), Transformaciones contemporáneas de la filosofía, Universidad del Valle y Universidad de París VIII, Cali, 2004.

——— [2005]: "Geometrías pura y aplicada desde el enfoque sintáctico-axiomático de las teorías", *eidos*, Revista de Filosofía de la Universidad del Norte, Nº 3, Julio 2005, pp. 60-82.

Hanson, N. R. [1971]: *Observación y explicación: guía de la filosofía de la ciencia*, Alianza Editorial, Madrid, 1977.

Jammer, M. [1954], *Conceptos de espacio*, Editorial Grijalbo, México D.F., 1970.

Kant, I. [1770]: *Principios formales del mundo sensible y el mundo inteligible*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1996.

——— [1781-1787]: *Crítica de la razón pura*, Madrid, Alfaguara, 1980.

——— [1783]: *Prolegomena to any Future Metaohysics*, Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1985; v.e.: *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir*, Editorial Porrúa, Argentina, 1991.

Leibniz, G. [1715 y 1716]: *La polémica Leibniz-Clarke*, Edición y traducción de Eloy Rada, Taurus, Madrid, 1980.

Mittelstaedt, P. [1966]: *Problemas filosóficos de la física*, Editorial Alhambra, Madrid, 1969.

Newton, I. [1687]: *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Editora Nacional, Madrid, 1982.

Poincaré, H. [1902]: *La ciencia y la hipótesis*, Espasa-Calpe, Buenos Aires,

1943.
Reichenbach, H. [1921]: “Estado actual sobre la discusión sobre la relatividad”, en *Moderna filosofía de la ciencia*, Editorial Tecnos, Madrid, 1965.
Sklar, L. [1992]: *Filosofía de la física*, Alianza Editorial, Madrid, 1994.
Smith, N. K. [1950]: *A Commentary to Kant's "Critique of pure reason"*, New York. (Reimpresión de segunda edición, revisada y aumentada, de 1923).
Torretti, R. [1967]: *Manuel Kant. Estudio sobre los fundamentos de la filosofía crítica*, Charcas, Buenos Aires, 1980.
van Fraassen, B. C. [1970]: *Introducción a la filosofía del tiempo y del espacio*, Editorial Labor, Barcelona, 1978.
——— [1980]: *The Scientific Image*, Clarendon Press, Oxford; v.e. *La imagen científica*, Paidós-UNAM, México, 1996.