Praxis Filosófica

ISSN (I): 0120-4688 / ISSN (D): 2389-9387

DOI: 10.25100/pfilosofica.v0i60.14470

EL ESPACIO CARTESIANO: MÉTODO Y GEOMETRÍA DE COORDENADAS. UNA NUEVA ÉPOCA DE LA CONCEPCIÓN ESPACIAL

Cartesian Space: Method and Coordinate Geometry. A New Era of Spatial Conception

Soledad Alejandra Velázquez Zaragoza

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.

ORCID: 0000-0002-9342-4421

E-mail: s.alejandravelazquez@gmail.com

Resumen

La concepción cartesiana del espacio representa la apertura de una nueva época, revolucionaria, en la concepción espacial de su tiempo, en vista del significado e impacto de la geometría de coordenadas de Descartes. La articulación de la aritmética y la geometría, resultado de la innovadora concepción del método —de las Regulæ ad Directionem Ingenii (1628)— conduce a entender el conocimiento como resultado de las relaciones entre los componentes de un sistema y la expresión de éstas en términos de funciones matemáticas. El enfoque aquí propuesto para el estudio del espacio cartesiano —como sistemático o unitario— es una ruta de análisis que difiere, pero complementa, las perspectivas ontológica, física y teológica que habitualmente se han recorrido para el estudio del espacio en este filósofo y de este modo cubre un importante hueco. Este enfoque ubica las consecuencias epistemológicas fundamentales que se extraen de la concepción metódica cartesiana.

Palabras clave: *Concepciones del espacio; método cartesiano; geometría de coordenadas; revolución científica; funciones matemáticas.*

¿Cómo citar?: Velázquez Zaragoza, S. A. (2024). El Espacio Cartesiano: Método y Geometría de Coordenadas. Una Nueva Época de la Concepción Espacial. *Praxis Filosófica*, (60S), e20414470. https://doi.org/10.25100/pfilosofica.v0i60.14470

Recibido: 16 de enero de 2024. Aprobado: 5 de julio de 2024.

Cartesian Space: Method and Coordinate Geometry. A New Era of Spatial Conception

***Soledad Alejandra Velázquez Zaragoza*[1]**

Abstract

The Cartesian conception of space represents the opening of a new, revolutionary era in the spatial conception of its time, in view of the meaning and impact of the contribution of Descartes' coordinate geometry. The articulation of arithmetic and geometry, the result of the innovative conception of the method —of the Regulae ad Directionem Ingenii (1628)— leads to understanding knowledge as a result of the relationships between the components of a system and the expression of these in terms of mathematical functions. The approach proposed here for the study of Cartesian space —as systematic or unitary— is a route of analysis that differs but complements the ontological, physical, and theological perspectives that have usually been followed for the study of space in this philosopher, and in this way, it covers an important gap. This approach locates the fundamental epistemological consequences extracted from the Cartesian methodical conception.

Keywords: *Conceptions of Space; Cartesian Method; Coordinate Geometry; Scientific Revolution; Mathematical Functions.*

[1] Profa. Titular del Colegio de Filosofía en la Escuela Nacional Preparatoria, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Profesora del Posgrado en Filosofía en la Facultad de Filosofía y Letras, UNAM y de la Maestría en Enseñanza de la Filosofía en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM. Licenciada, maestra y doctora en Filosofía, títulos otorgados por la UNAM con mención honorífica. Áreas de investigación: Filosofía Moderna de los ss. XVII y XVIII y Enseñanza de la Filosofía. Miembro de los grupos de investigación: Seminario de Historia de la Filosofía, de la UNAM; Red Iberoamericana Descartes; Proyecto: Epistemología, enseñanza, cognición y representaciones encarnadas, IN401222, UNAM.

EL ESPACIO CARTESIANO: MÉTODO Y GEOMETRÍA DE COORDENADAS. UNA NUEVA ÉPOCA DE LA CONCEPCIÓN ESPACIAL

Soledad Alejandra Velázquez Zaragoza

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.

I. Introducción

La concepción cartesiana del espacio caracterizado como unitario o sistemático que aquí propongo emerge de la articulación entre el método y los hallazgos matemáticos que Descartes propone en las *Reglas para la dirección del espíritu* (1628) y la geometría de coordenadas de la *Geometría* (1637). Esta ruta de estudio del espacio que vincula el método con la geometría de coordenadas se suma a los enfoques que habitualmente han abordado las concepciones espaciales durante los siglos XVI y XVII. Éstos se han ocupado, como es sabido, de la naturaleza del espacio en sus perspectivas ontológica, físico-cosmológica y, sobre todo, teológica[2].

El caso de Descartes no ha sido la excepción. Así, desde su faceta ontológica, al espacio cartesiano se le ha venido estudiando en correspondencia con la sustancia extensa, siendo ésta la línea más frecuente de investigación en la metafísica.

En su ángulo físico, atendiendo a su plenismo material, se le ha caracterizado como defensor del espacio interno; pues, en efecto, Descartes consideró que cuerpo y espacio se implican recíprocamente por lo que no se

[2] De acuerdo con E. Grant (1981): "La subsecuente descripción del espacio y las controversias acerca de su naturaleza durante los siglos XVI y XVII fueron en gran parte de naturaleza física, ontológica y especialmente teológica." (p. 234) Todas las traducciones de las obras aquí referidas son mías, salvo indicación.

requiere de un espacio contenedor de ellos, es decir, de un espacio externo[3]. Por otro lado, es conocida la atención, por parte de los analistas, a las diversas controversias y debates que Descartes mantuvo, por ejemplo, con Henry More (1614-1687), sobre la naturaleza del espacio y sus implicaciones teológicas (Benítez, 2013; Jammer, 1993, pp. 43 y ss.).

En este artículo me interesa mostrar que el estudio del espacio cartesiano como sistemático o unitario es una ruta de análisis que difiere, pero complementa, las perspectivas antes mencionadas, recorridas ampliamente en la literatura cartesiana: ontológica, física y teológica, por lo que se orienta a la atención de un importante hueco en los estudios cartesianos.

La particularidad del enfoque aquí propuesto consiste en que el espacio sistemático cartesiano permite ubicar las consecuencias, fundamentalmente epistemológicas, que se extraen de la concepción metódica cartesiana. Su resultado, como se sabe, dio lugar al surgimiento de un terreno innovador en el conocimiento dentro del horizonte de la Modernidad temprana, así como una herramienta clave de la Nueva ciencia: la geometría de coordenadas.

A juicio de Einstein, la aportación del sistema de coordenadas impulsó una nueva época de la concepción espacial (Jammer, 1993, p. XV); por su parte, en términos de Ernst Cassirer, este sistema trajo consigo una verdadera revolución científica ya que clausuró la 'incomunicabilidad de los géneros' (Cassirer,1977, p. 91). De este modo, la geometría de coordenadas, al articular la aritmética y la geometría, no sólo significó un nuevo método para conocer; transformó la propia idea de 'conocer' pues el conocimiento, en su vuelco científico "consistiría en pensar las relaciones entre los entes" (Ortega y Gasset, 1962*,* p. 241) y no a éstos en su aislamiento genérico. Por ello, se ha afirmado que el auténtico viraje que separa el pensamiento moderno de la tradición aristotélico-escolástica se encuentra en la concepción del conocimiento como el resultado de las *relaciones* entre los componentes de un sistema[4] y la expresión de éstas en términos de funciones matemáticas.

Esta visión relacional del espacio cartesiano generaría importantes secuelas en conceptos fundamentales del pensamiento moderno e ilustrado, entre los que se encuentra, por ejemplo, la idea básica kantiana de la idealidad del espacio, en su *Estética trascendental*, en la tesis conocida

[3] Esta concepción fue también defendida por Aristóteles, Juan Buridán (*ca*. 1300-*ca*. 1358), Francisco Toledo (1532-1596), y Francisco Suárez (1548-1617), entre otros.

[4] En este sentido, L. Brunschvicg (1912) afirma que el inicio de la ciencia moderna está señalado por la diferencia básica que prevalece entre la geometría de los antiguos y la cartesiana, pues la primera: "continúa siendo lo que llamaremos un estudio cualitativo de la cantidad; [por lo que] es natural que no conduzca al estudio cuantitativo de las calidades, que es el principio de la ciencia moderna." (p. 122).

como ‘la idealidad del sentido’, de acuerdo con la cual todo conocimiento que podemos tener de los objetos se inscribe necesariamente en el terreno de lo relacional[5].

El impacto fructífero de la concepción espacial cartesiana —sistemática y relacional— particularmente en el ámbito de las nociones epistemológicas y sus repercusiones metafísicas es aún una tarea en desarrollo que ofrece amplias perspectivas. Un propósito de esta comunicación es el de promover dicha labor, por lo que para ese fin aquí abordaremos, de manera escueta, aspectos básicos para la comprensión del espacio sistemático cartesiano: concepción metódica y geometría de coordenadas. Para alcanzar tal objetivo, el primer apartado se ocupa de la articulación entre la concepción cartesiana de matemática (*mathesis universalis*) y el método expuesto en las *Regulæ ad Directionem Ingenii* (1628). En el segundo apartado se plantea la culminación de dicha articulación: la geometría de coordenadas, una aportación fundamental tanto para el desarrollo de la Ciencia Nueva, como para la historia del pensamiento matemático. Asumimos, desde luego, el carácter meramente introductorio y parcial de esta presentación, en vista de la breve extensión aquí requerida[6].

II. Método y Matemática: *Mathesis Universalis*

Para entender cómo la matemática se encuentra íntimamente ligada al método cartesiano, hay que considerar el método expuesto en las *Regulae ad Directionem Ingenii*. Las *Reglas* contienen, en efecto, la exposición de la así denominada *Mathesis universalis* que Descartes consideró uno de sus más importantes descubrimientos metodológicos y el verdadero sentido de la matemática en su método.

En el mismo núcleo de la noción *Mathesis Universalis* se halla la matemática en su sentido básico pues, si bien *Mathesis* etimológicamente “significa tan sólo lo mismo que disciplina” (AT X, *Regla* IV, 377; Descartes,1996b, p. 85)[7] la aritmética y la geometría, así como la astronomía,

[5] Así, si “sólo se nos dan representaciones de la relación del objeto con el sujeto, únicamente podemos conocer las propiedades relacionales de los objetos, no lo interior, no sus propiedades intrínsecas. [… Por ello] “de los objetos, únicamente podemos conocer lo que se inscribe en el ámbito de lo relacional, a saber, las propiedades relacionales de éstos.” Diana Contreras, La idealidad del espacio en Kant. Una lectura, Manuscrito. Comunicación interna del Seminario de Historia de la Filosofía, UNAM.

[6] Una exposición más completa de diversos aspectos de este tema se encuentra en Velázquez (2022).

[7] Todas las citas empleadas de René Descartes se citan de la edición de Adam-Tannery (AT), de la manera acostumbrada: número de volumen, nombre de la obra, página

la música, la óptica, la mecánica y otras muchas se consideran parte de la matemática, al ser, todas ellas, disciplinas[8].

> *Mathesis Universalis* se refiere a todo objeto que se estudia con orden y medida: no importa si tal medida ha de buscarse en los números, en las figuras, en los astros, en los sonidos o en cualquier otro objeto [...] debe haber una ciencia general que explique todo lo que puede buscarse acerca del orden y la medida, no con un nombre adaptado, sino ya antiguo y aceptado por el uso: Mathesis Universalis, ya que en ésta se contiene todo aquello por lo que las otras ciencias son llamadas partes de la Matemática. (AT X, Regla IV, 378; Descartes,1996b, p. 86)

La posibilidad de esta ciencia general se deriva de que todas las ciencias, en su diversidad, no son más que la expresión de una sabiduría universal (*Universalis sapientia*) es decir, de "la sabiduría humana, que permanece siempre una y la misma, aunque aplicada a diferentes objetos" (AT X, *Regla* I, 360; Descartes,1996b, p. 62). La unidad de la ciencia permanece oculta a quienes orientan sus esfuerzos al conocimiento de 'estudios particulares', parciales, ignorando que "nada nos aleja más del recto camino de la búsqueda de la verdad que el dirigir los estudios no a este fin general [sabiduría universal], sino a algunos particulares." (AT X, *Regla* I, 360; Descartes,1996b, p. 65). En consecuencia, quien quiera investigar de acuerdo con el método verdadero[9], deberá saber que "el conocimiento de una verdad

o páginas. Si es el caso, a continuación se refiere la obra de la que se toma la traducción al castellano o se indica si se trata de una traducción propia.

[8] En su estudio de la génesis de la filosofía natural cartesiana, S. Gaukroger expone que, hacia 1619, el interés de Descartes por las matemáticas se concentró en las importantes posibilidades que encontró en el uso del compás como herramienta para la resolución de antiguos problemas geométricos y aritméticos. Mediante el fructífero empleo de dicha herramienta descubrió el principio subyacente: una disciplina más fundamental con capacidad de abarcar la aritmética y la geometría, así como a varias ramas de la matemática práctica. Denominó a esta disciplina para la resolución de problemas: *mathesis universalis*, 'matemática universal'. Descartes comprobó la enorme eficacia de esta disciplina al resolver problemas que no se habían resuelto desde la antigüedad –como el problema de Pappus. Los hallazgos de la investigación matemática cartesiana fueron impulsores de la conformación metódica desarrolla en las *Reglas* y otras obras. *Cfr*. Gaukroger (2002) *Descartes System of Natural Philosophy*, pp. 7-10. Este señalamiento es relevante para comprender la relación entre el método y la geometría de coordenadas que conduce a la concepción espacial cartesiana, objetivo de este trabajo. Agradezco la observación de las personas dictaminadoras de la versión previa de este trabajo que motivaron la precisión anterior.

[9] El método cartesiano es, a la vez, tanto una guía o criterio epistémico como una ejercitación de las habilidades cognoscitivas: "entiendo por método reglas ciertas y fáciles, mediante las cuales el que las observe exactamente no tomará nunca nada falso por verdadero y no empleando inútilmente ningún esfuerzo de la mente, sino aumentando gradualmente

no nos aparta del descubrimiento de otra (…) sino, más bien, nos ayuda" (AT X, *Regla* I, 360; Descartes,1996b, p. 63), por lo anterior, su "principal secreto" consiste en disponer todos los temas de investigación en series. En efecto, de todas las enseñanzas de este tratado, Descartes reconoce que la de mayor utilidad nos revela:

> que todas las cosas pueden ser dispuestas en ciertas series (…) *en cuanto pueden conocerse unas a partir de otras* [cursivas añadidas], de modo que cuantas veces se presente alguna dificultad, inmediatamente podamos advertir si sería útil examinar primero algunas otras, y cuáles y en qué orden. (AT X, *Regla* VI, 381; Descartes,1996b, p. 89)

En otros términos, si queremos encontrar la solución de la dificultad o problema en estudio, hemos de colocar serialmente los diversos aspectos que la conforman. Tal disposición dependerá, pues, del lugar que ocupa un elemento entre los otros, lo cual ha de definirse como resultado del cotejo recíproco de los aspectos en investigación. El "lugar" de un elemento es, pues, relativo al conjunto del cual forma parte, del cual proviene su inteligibilidad.

Así, el acto de conocer, acatando la rectitud metódica, implica el acto de comparar —asignar un valor como resultado de un cotejo—, lo cual queda firmemente asentado desde el inicio de la *Regla I*, donde Descartes señala que el conocimiento erróneo es el producto de una comparación equivocada; por ende, el verdadero conocimiento es el fruto de una comparación acertada, para lo cual debemos situar los distintos elementos estudiados en "una misma visión de conjunto". Ya que comparar supone el conocimiento de una cosa mediante otras, el conocimiento verdadero, de acuerdo con Descartes, es el obtenido tras la aplicación del método, como una determinación de relaciones entre los elementos cotejados. He ahí, en el núcleo del significado matemático del método cartesiano, el vuelco radical que implica la aparición del pensamiento 'funcional'; no hay conocimiento del fenómeno aislado, el verdadero conocimiento requiere ubicar los fenómenos en una misma 'visión de conjunto' que permita establecer interconexiones entre ellos[10].

su ciencia, llegará al conocimiento verdadero de todo cuanto es capaz." (AT X, *Regla* IV, 371-372; Descartes,1996b, p. 79).

[10] La clave de la seriación, como pieza central del método, es disponer los elementos en forma relacionada, evitando examinarlos separadamente. Así, se entiende que la cúspide del método, "el ejemplo más noble de todos" consista en conocer el propio entendimiento, ya que "nada puede ser conocido antes que el entendimiento, puesto que de él depende el conocimiento de todas las demás cosas, y no a la inversa". (AT X, *Reg.* VIII, 395; Descartes,1996b, p. 102). En efecto, la conclusión de Descartes es que no hemos de ocuparnos

En efecto, el conocimiento metódico deberá disponer en series los elementos en investigación, pero, al hacerlo, es imprescindible alejarse de los procedimientos del pasado, por lo que —señala Descartes— tal disposición deberá efectuarse "no, sin duda, en cuanto se refieren a algún género del ente, como las dividieron [las cosas] los filósofos conforme a sus categorías, sino en cuanto pueden conocerse unas a partir de otras." (AT X, *Regla* VI, 381; Descartes,1996b, p. 89).

Al separarse de la tradición aristotélico-escolástica, proponiendo un marcado giro en la estrategia metódica para el conocimiento de la naturaleza, Descartes se coloca como el verdadero fundador de la filosofía moderna, lo cual, de acuerdo con E. Cassirer (1953), se reconoce "no porque coloque a la cabeza de su especulación la idea de método, sino porque asigna a éste una *función* nueva." (p. 448).

III. Método y Geometría de Coordenadas

La nueva ruta que tomó el método, en el contexto de la filosofía cartesiana, corrió en paralelo con la reforma de la geometría[11]. Los problemas y hallazgos de la investigación matemática de Descartes desde 1619 —fecha de inicio de *Las Reglas*—, impulsaron la conformación del método que proveería los elementos epistemológicos para elaborar la propuesta de la concepción espacia expuesta en la *Geometría*.

¿Cómo podemos resumir la novedad de dicha ruta metódica? La estrategia ante el conocimiento asume, como punto de partida, la posibilidad de instituir un orden y relación entre los componentes de todo campo de conocimiento. Ello es factible en vista de que, en esta estrategia, el énfasis no se deposita en los contenidos aislados de la idea a conocer —o problema a resolver—, sino en el ordenamiento necesario que poseen sus componentes al

de las cosas por sí mismas, sino de la manera en que éstas pueden, con fruto, ser abarcadas, es decir, conocidas. Hay que ocuparnos, pues, en conocer cuáles son las capacidades del entendimiento humano.

[11] Los detalles de la investigación matemática de Descartes pueden seguirse en el estudio de Mary Domsky (2022), "Las matemáticas de Descartes", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*) quien desarrolla una lograda exposición del tema, abordando las fuentes asequibles al respecto: tanto aquellas publicadas como las obtenidas en la correspondencia. Su recorrido incluye los antecedentes, el primer período de las mismas (aprox. 1616-1629) y la propuesta de madurez de 1637 en *La Geometría*. Señala, entre otros aspectos, la ruta de Descartes que lo conduce desde el punto de partida: los problemas geométricos de los antiguos, hasta el desarrollo de la resolución de estos mediante el empleo de herramientas como el compás.

ubicarse en forma concatenada, sin hiatos. En palabras de Cassirer (1977)[12]: "La primera regla de todo saber racional, debe, pues, consistir en articular los conocimientos de manera tal que formen una serie única (…) excluyendo toda transición forzada." (p. 90).

Dado que no hay "saltos", tal articulación supone una gradación continua de los contenidos que impide dejar componentes "fuera" de la seriación. Ésta es la condición de la nueva objetivación racional:

> Para emerger del conocimiento humano un objeto debe, necesariamente, pasar por esta condición que impone una conexión continua, de tal modo que no hay un problema tan aislado, que no pueda ser recogido y completamente dominado después de un recorrido tal, seguido paso a paso. (Cassirer, 1977, p. 90)

De este modo, ningún componente impone arbitrariamente su presencia a los elementos que le preceden, todo elemento se deriva de una gradación continua, en el marco de una regla rigurosa.

Este ideal metódico alcanza, en Descartes, los diferentes campos del saber pero, sobre todo, se plasma y expresa en la *Geometría*, cuya preeminencia es explicada por nuestro filósofo a su corresponsal Mersenne en la misiva del fin de diciembre de 1637, de la siguiente manera: "mediante la *Dióptrica* y los *Meteoros* he tratado de persuadir [a la gente] de que mi método es mejor que el ordinario; pero, a través de mi *Geometría*, pretendo haberlo demostrado." (AT I, 478).

¿Por qué, cabe preguntarnos, pese a la universalidad del método, Descartes encuentra en la geometría su más perspicua aplicación? La respuesta debemos hallarla, no en el apoyo propedéutico que ofrecen la aritmética y la geometría, en vista de su contenido disciplinario específico[13], sino en el hecho de que, para Descartes, el auténtico conocimiento geométrico, dadas las exigencias metódicas, sólo se presenta "en el sentido riguroso del término, ahí donde, *en lugar de habérselas con objetos aprehendidos uno a uno por la reflexión* [cursivas añadidas], se da un procedimiento en función del cual la totalidad de los objetos se puede construir y engendrar." (Cassirer,

[12] Nos servimos a continuación de los planteamientos de E. Cassirer (1977), principalmente de *Sustancia y función: elementos para una teoría del concepto*.

[13] Como es sabido, el apoyo que encuentra Descartes en las disciplinas de contenido matemático –en el sentido vulgar–o sea, en la aritmética y la geometría, es de carácter propedéutico y orientador, como lo hace saber en las *Reglas*: "Cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría, porque se las tenía por las más simples y como un camino para las demás." (AT X, *Reglas*, IV, 374-5; Descartes, 1946, pp. 24-25)

1977, p. 90). De ahí la sistematicidad metódica: incluye a la totalidad de los objetos mediante un régimen riguroso.

De este modo, el cambio de estrategia para el conocimiento, propuesto por el método, se revela nítidamente en la auténtica geometría, opuesta a la tradicional. En efecto, la geometría de los antiguos recoge sus propiedades "de una intuición sensible inmediata, mediante la cual no se puede llegar, jamás, a exponer el encadenamiento sistemático que la une a otras figuras." (Cassirer, 1977, p. 90). De las enseñanzas de aritmética y geometría que Descartes tuvo a su alcance, opina:

> no caían en mis manos autores que me satisficieran plenamente en ninguna de las dos; porque es verdad que leía en ellos muchas cosas respecto de los números que yo comprobaba que eran verdaderas, por cálculos hechos después y por lo que toca a las figuras, presentaban, por decirlo así, ante los mismos ojos, muchas verdades, que sacaban verdaderamente de ciertos principios; pero me parecía que no hacían ver suficientemente al espíritu por qué tales cosas eran así y cómo se hacía su descubrimiento. (AT X, *Reglas*, IV, 375; Descartes, 1946, pp. 24-25).

La exposición que impide ver el procedimiento empleado es la que corresponde al método sintético, esto es, el empleado por los geómetras de la tradición. A petición de los autores del segundo grupo de objeciones, en las *Meditaciones*, Descartes precisa su parecer acerca de la síntesis, método de demostración en geometría que:

> usa de una larga serie de definiciones, postulados, axiomas, teoremas y problemas (…) [empero] no satisface por entero, como sí lo hace el análisis, a quienes desean aprender, pues [el método de la síntesis] no enseña el camino seguido para *construir* [cursiva añadida], la cosa. (AT IX, 122; Descartes, 1987, p. 126)

Descartes le reprocha a la geometría tradicional su carencia de 'constructivismo', es decir, no muestra el modo por el cual la cosa se ha generado[14], lo cual dificulta el seguimiento racional de la exposición, por

[14] "El análisis muestra el verdadero camino por el que una cosa ha sido metódicamente construida, y manifiesta cómo los efectos dependen de las causas; de suerte que, si el lector sigue dicho camino, y se fija bien en todo cuanto encierra, entenderá la cosa así demostrada tan perfectamente, y la hará tan suya, como si él mismo lo hubiera trazado. Más este género de demostración no sirve para convencer a los lectores testarudos o poco atentos: pues si escapa a la atención el más mínimo detalle de ella, sus conclusiones no parecerán necesarias (…) Al contrario, la síntesis, siguiendo un camino muy distinto, como si examinase las causas por sus efectos (aunque con mucha frecuencia, la prueba en ella contenida sea también la de

ello, dice Descartes, las disciplinas que cultivaron los antiguos geómetras, eran desdeñadas

> aun entre los hombres de talento y de saber, [al considerarlas] pueriles y vanas (…) apenas probadas o por el contrario, se asustasen de aprenderlas, en los mismos comienzos, por ser muy difíciles e intrincadas. Porque, en verdad, nada hay tan vano como ocuparse de números vacíos y de figuras imaginarias de tal modo que parezca que queremos reposar en el conocimiento de tales bagatelas y consagrarnos a este género de demostraciones superficiales, que más veces se encuentran por casualidad que por arte, y que pertenecen más a los ojos y a la imaginación que al entendimiento, hasta el punto de que perdemos, en cierto modo, la costumbre de utilizar la razón misma. (AT X, *Reglas*, IV, 375; Descartes,1946*,* p. 25)

En efecto, los números son vacíos y las figuras son fingidas mientras no se encuentre la manera de trascender la superficialidad de la demostración que se desprende de su carácter fortuito; debe buscarse, en cambio, que aquélla repose en una *auténtica necesidad* que sólo habrá de alcanzarse cuando el cálculo aritmético y las operaciones de la geometría se encuentren vinculadas racional y sistemáticamente. En dicha articulación desemboca la racionalidad del método, que Descartes se propone lograr en la *Geometría*, donde nos explica, tras el primero de sus párrafos, en el Libro primero: "Cómo el cálculo aritmético se relaciona con las operaciones de la geometría." (AT VI, *Geom.*, 369; Descartes, 1987, p. 279).

Considerando el recorrido anterior, entendemos el sentido en que Cassirer (1977) juzga que ha sido "una necesidad filosófica interna la que condujo a Descartes a descifrar la noción de espacio mediante la noción de número." (p. 90). El método dio lugar a una nueva geometría, misma que dejó de ser una 'geometría de la medida' para pasar a ser una 'geometría de la posición' y, de ese modo, al transferir el espacio al número la investigación geométrica recibió un nuevo estatuto teórico.

En efecto, la 'traducción' del espacio por el número implica servirse de éste no como una mera técnica de medida. El número, al convertirse en una serie de valores ligados entre sí por una regla, da lugar a puntos, líneas o curvas, expresados como especificaciones singulares de esas series de valores. Así, la figura concreta 'bien representada', que en la geometría sintética se obtenía como un dato determinado y "susceptible de aprehensión inmediata" (Cassirer, 1977, p. 93), resultado de un proceso de mediciones,

---

los efectos por sus causas), demuestra claramente lo contenido en sus conclusiones, y usa de una larga serie de definiciones" (AT IX, 121-122; Descartes, 1987, pp. 125-126).

da lugar a las determinaciones que emergen al aplicarse de un punto a otro de diversas maneras.

Como resultado del vínculo entre el número y la forma geométrica: "La figura 'dada' es, de alguna manera, pulverizada y, en su lugar, se revela una multiplicidad de relaciones (…) unificadas, a fin de cuentas, en el conjunto de una sola pieza en virtud de las reglas de dependencia que las articula." (Cassirer, 1977, pp. 95-96). Dichas reglas de dependencia se expresan a través de funciones matemáticas.

De este modo, la investigación matemática deja de considerar meras magnitudes extensivas y se transforma en "una teoría general de las funciones." (Cassirer, 1977, p. 96). Los 'elementos' llamados a constituir magnitudes extensivas, por medio de la conjunción de 'partes', pasan a ser formas determinadas por 'funciones'.

Así, el concepto abstracto de número se transforma en el "concepto puro de forma." Ello significa que el objeto de interés de la geometría griega, es decir, la diversidad sensible de las figuras posibles, se deposita, ahora, *en la manera en que proceden unas figuras de las otras*, por lo que al tomar en consideración una de ellas en particular, no se puede dejar de tomar en cuenta "la *red de conjunto de la que forma parte* y que expresa la colección entera de las figuraciones entre las cuales la figura está potencialmente determinada, de acuerdo con ciertas reglas invariables de transformación." (Cassirer, 1977, p. 98). Las cuales, como es sabido, caracterizan la aparición de la geometría proyectiva, diferenciada de la métrica[15].

La innovación en la concepción cartesiana del espacio es solidaria del ideal perseguido por su método, en el cual el número asume su papel propio como integrante de una conformación serial. En efecto, para Descartes, el tratamiento de las propiedades proyectivas de las formas geométricas sólo podía ser abarcado por el principio analítico del método, gracias al cual —como se ha mencionado— la figura particular deja de aparecer bajo su

[15] Henri Poincaré (1964, pp. 15 y ss.) propone la posibilidad de distinguir tres clases de geometría, de acuerdo con el tipo de equivalencia que éstas mantienen entre las figuras. A partir de la distinción tradicional de los geómetras, Poincaré menciona los tres tipos de equivalencia: la *geometría métrica* considera equivalentes dos figuras tan sólo cuando son "iguales", es decir, cuando las magnitudes coinciden por superposición. En la *geometría proyectiva*, segunda posibilidad que marca Poincaré, la equivalencia no requiere de la igualdad de las figuras, éstas se relacionan proyectivamente cuando son cualitativamente similares, esto es, cuando *no existe diferencia estructural* entre ellas. La tercera forma de equivalencia la encontramos en el *análisis situs*, en el cual dos figuras son equivalentes "siempre que pueda pasarse de una a otra mediante una deformación continua". La filosofía cartesiana, testigo e impulsora de la aparición de la geometría proyectiva, incorporará a su seno interesantes consecuencias derivadas de este hecho.

aspecto concreto para encontrar que el objeto de la investigación viene a ser “el haz de relaciones sobre las cuales se funda el sistema (…) [que aloja] cada figura singular y da, verdaderamente, acceso al objeto geométrico.” (Cassirer, 1977, p. 101).

Por lo anterior, el interés de la geometría deja de ser el conocimiento de la figura ‘dada’ para concentrarse en la *red de correlaciones* que se teje entre ella y las formaciones vecinas, la cual sólo resulta ser inteligible, en forma precisa, mediante su determinación numérica. De ahí pues, la necesidad de articular el número a la forma espacial. Tal es el meollo de la geometría de la posición, de acuerdo con la cual: “Decimos de cierta figuración espacial, que está correlativamente ordenada a otra cuando se la puede derivar, por transformación continua, de uno o varios elementos de posición [lo que presupone] rasgos invariables de ciertas relaciones espaciales (…) que [desempeñan] el rol de condiciones generales del sistema” (Cassirer, 1977, p. 101) expresables formalmente como *funciones* matemáticas.

La aparición de esta red o haz —que determina las “condiciones generales del sistema”— constituye, propiamente, el núcleo de la reforma de la concepción espacial expuesta por Descartes en su *Geometría*, a través del espacio “racionalizado” por la determinación de condiciones fijas, o coordenadas, que permiten el tránsito del número a la forma geométrica y a la inversa; pues, en efecto —según lo explica G. Israel (1998)— el álgebra, en Descartes,

> no es únicamente un instrumento para obtener, de manera simple, construcciones geométricas. (…) No solamente cada problema geométrico es susceptible de un tratamiento algebraico, permitiendo razonar de una manera estenográfica y abreviada, (…) sino que será posible dar una traducción geométrica para cada formulación algebraica. Se obtendrá, pues, para cada lugar geométrico, la ecuación algebraica que lo representa (…) e, inversamente, se podrá encontrar un lugar geométrico a partir de una ecuación dada. (Israel, 1998, p. 201)

Este efecto, en espejo, que constituye la esencia de la geometría analítica moderna coloca “el método de las coordenadas en un papel que no es accesorio ni técnico, sino central.” (Israel, 1998, p. 202)[16].

[16] De acuerdo con lo expuesto por Giorgio Israel (1998), en su acucioso estudio filosófico de la geometría cartesiana (pp. 201-202), es un anacronismo denominar geometría analítica a la geometría cartesiana. En efecto, la expresión “geometría analítica”, como es sabido, nunca fue utilizada por Descartes, apareció por vez primera en la introducción al primer tomo del *Traité du calcul differentiel et du calcul intégral* de Sylvestre–François Lacroix en la edición de 1797 (Israel,1998, pp. 199-200). La motivación de Descartes

IV. Conclusión

Si es cierto que el descubrimiento de la geometría de coordenadas se adjunta a una revolución en el modo de pensar es porque —según espero haberlo aclarado por lo dicho hasta aquí— aquél marca el cambio de estrategia en la dirección del conocimiento: en lugar de recorrer las propiedades específicas de los elementos en estudio, término a término, se ha creado una nueva manera de validar la demostración, expresada mediante una fórmula, la cual descansa en la determinación de las reglas de invariabilidad que rigen el dominio considerado.

Esto quiere decir que:

> La única regla de la cual debemos partir, se puede conceptualizar enunciando la posibilidad de fijar el valor de ciertas relaciones definidas de una vez por todas, a pesar del cambio que se presente en el contenido de los elementos y de los términos singulares que se ponen en relación. (Cassirer, 1977, p. 101)

En otros términos, dicha regla opera bajo la determinación de un marco —la red o haz que antes mencionamos— a partir del cual los términos particulares adquieren sus valores específicos, su nueva 'objetivación', expresable mediante funciones matemáticas.

El desarrollo de la Ciencia nueva, como es sabido, concibió su posibilidad en la medida en que fuera factible entender y expresar la complejidad del fenómeno mediante la concatenación sistemática de sus componentes. Para ello había que concebir el terreno de la multiplicidad como susceptible de ser

---

era la de aportar una solución reductiva a los problemas de construcción geométrica. Este propósito de Descartes queda explícito en el primer párrafo de la *Géométrie*: "Todos los problemas de la Geometría pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente, para construirlos, sino conocer la longitud de algunas líneas." (AT VI, *Geometría*, 369; Descartes, 1987, p. 279). Sin embargo, el principio fundamental de lo que se denomina hoy "geometría analítica" y que consiste "en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas corresponden a lugares geométricos" (Boyer, 1999, p. 434) aparece en el segundo libro de *la Geometría*, de la siguiente manera: "todos los puntos de las [líneas] que pueden llamarse geométricas, es decir, de aquellas que caen bajo alguna medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta y esta relación puede ser expresada por alguna ecuación válida para todos los puntos" (AT VI, *Geometría*, 392; Descartes, 1987, p. 297). Así, aunque debe admitirse que Descartes no dio un uso práctico como el que hoy se asocia al uso de las coordenadas (ciertamente, no toma un sistema de ejes de coordenadas perpendiculares para localizar con respecto a él la posición de determinados puntos) su avance en esa dirección fue notable pues concibió los aspectos medulares del método de coordenadas, el cual jugaría el papel central en la geometría analítica.

descrito en los términos de estructuras que permitieran develar la necesidad del encadenamiento de las particularidades.

Para lograr lo anterior, había que alejarse de la "universalidad abstracta del concepto", incapaz de satisfacer estas demandas, y alcanzar la "universalidad concreta de la fórmula" (Cassirer, 1977, p. 101), logro que fue posible merced a la concepción cartesiana del espacio sistemático.

Como se señala en la Introducción, los estudios cartesianos a propósito de la concepción del espacio del filósofo francés se han dirigido al análisis de sus ángulos ontológico, físico-cosmológico y, desde luego, teológicos; sin embargo, cabe esperar el desarrollo, ahora incipiente, del análisis del espacio sistemático cartesiano, que conecta las líneas de su filosofía epistemológica con la matemática; ámbito de estudio al que este texto persigue convocar.

Referencias bibliográficas

Benítez, L. (2013). Bases platónicas del neoplatonismo de Henry More. En L. Benítez y A. Velázquez (Coord.), *Tras las huellas del platón y el platonismo en la filosofía moderna* (pp. 309-335). Facultad de Estudios Superiores Acatlán.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.

Brunschvicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*. Lautaro.

Cassirer, E. (1953). *El problema del conocimiento* (Vol. 1). Fondo de Cultura Económica.

Cassirer, E. (1977). *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept*. Les éditions de Minuit.

Descartes, R. (1946). *Reglas para la dirección del espíritu* (M. Mindán, Trad.) (Publicación original: Revista de Occidente). Secretaría de Educación Pública.

Descartes, R. (1987). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría* (G. Quintás, Trad.). Ediciones Alfaguara.

Descartes, R. [AT]. (1996a). *Œuvres de Descartes* (11 vols.) (C. Adam y P. Tannery Eds.). Librairie Philosophique J. Vrin.

Descartes, R. (1996b). *Reglas para la dirección del espíritu* (J. Navarro Trad.). Alianza Editorial.

Domski, M. (2022). Las matemáticas de Descartes. En E. Zalta y U. Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2022 Edition). Recuperado de: https://plato.stanford.edu/archives/fall2022/entries/descartes-mathematics/

Gaukroger, S. (2002). *Descartes System of Natural Philosophy*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511606229

Grant, E. (1981). *Much ado about Nothing. Theories of Space and Vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511895326

Israel, G. (1998). Des Regulæ à la Géométrie. *Revue d'histoire des sciences*, *51*(2-3), 183-236. https://doi.org/10.3406/rhs.1998.1322

Jammer, M. (1993). *Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*. Dover edition.

Ortega y Gasset, J. (1962). *Obras completas, Tomo VIII. La idea de principio en Leibniz y la evolución de la teoría deductiva.* Revista de Occidente.

Poincaré, H. (1964). *El espacio y el tiempo*. Universidad Nacional Autónoma de México.

Velázquez, S. (2022). *La teoría espacial de Descartes. Método y geometría de coordenadas*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Filosofía y Letras. https://ru.atheneadigital.filos.unam.mx/jspui/handle/FFYL_UNAM/7838